Konzepte für Experimente an zukünftigen Hadroncollidern II

PD Dr. Oliver Kortner

12.06.2020

Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Die Binomialverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit an, n_k Ereignisse aus insgesamt N Ereignissen zu beobachten, wenn ν_k Ereignisse erwartet werden:
$$p(n_k;\nu_k) = \binom{N}{n_k}\left(\frac{\nu_k}{N}\right)^{n_k}\left(1-\frac{\nu_k}{N}\right)^{N-n_k}.$$
$< n_k >= \nu_k,\ Var(n_k) = \nu_k(1-\frac{\nu_k}{N})$.
- Man erhält die Poissonverteilung aus der Binomialverteilung, wenn N hinreichend groß ist und $n_k \ll N$ gilt:
$$p(n_k;\nu_k) = \frac{\nu_k^{n_k}}{n_k!}e^{-\nu_k}.$$
$< n_k >= \nu_k,\ Var(n_k) = \nu_k$.
- Normalverteilung einer d-dimensionalen Zufallsgröße $x \in |\mathrm{R}^d$
$$p(x;\mu,\Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\frac{1}{\sqrt{det(\Sigma)}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^t\Sigma^{-1}x-\mu)\right).$$
$$\Sigma \in^d |\mathrm{R}^d,\ \mu \in |\mathrm{R}^d.$$

Eigenschaften der eindimensionalen Normalverteilung

$$p(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

$w_n :=$ Wahrscheinlichkeit, einen Wert $x \in [\mu - n\sigma, \mu + n\sigma]$ zu beobachten.

n	w_n
1	$0,6827$
2	$0,9545$
3	$0,9973$
4	$1 - 6,3 \cdot 10^{-5}$
5	$1 - 5,7 \cdot 10^{-7}$

w_n	n
$0,900$	$1,645$
$0,950$	$1,960$
$0,990$	$2,576$
$0,999$	$3,290$

Begriff der stochastischen Konvergenz

(t_n) sei eine Folge von Zufallsgrößen und T ebenfalls eine Zufallsgröße. Man sagt, t_n konvergiere stochastisch gegen T, wenn es zu jedem $p \in [0, 1[$ und $\epsilon > 0$ ein N so gibt, dass die Wahrscheinlichkeit P, dass $|t_n - T| > \epsilon$ ist, kleiner als p für alle $n > N$ ist:

$$P(|t_n - T| > \epsilon) < p \ (n > N).$$

Mit anderen Worten: Die Wahrscheinlichkeit, einen von T verschiedenen Wert t_n zu beobachten, verschwindet für $n \to \infty$.

Gesetz der großen Zahlen. Zentraler Grenzwertsatz

Das Gesetz großer Zahlen

(x_n) sei eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen, wobei jedes x_n derselben Verteilungsfunktion folgt. μ bezeichne den Erwartungswert von x_n. Dann konvergiert das arithmetische Mittel

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$$

stochastisch gegen μ.

Der zentrale Grenzwertsatz

(x_n) sei eine Folge identisch verteilter Zufallsgrößen mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ. Dann konvergiert für $N \to \infty$ die standardisierte Zufallsgröße

$$Z_N := \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} x_n - N\mu}{\sigma\sqrt{N}}$$

punktweise gegen eine Normalverteilung mit dem Mittelwert 0 un der Standardabweichung 1.

Punktschätzung

Es sei α ein Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Das Ziel der Punktschätzung ist es, den besten Schätzwert (die beste Messung in der Sprechweise der Physiker) von α zu finden.

x: Zufallsgröße, die den experimentellen Messwerten entspricht.
$p(x;\alpha)$: Wahrscheinlichkeitsdichte für die Messung von x in Abhängigkeit des Parameters α.

x und α können mehrdimensional sein.

Definition. Ein Punktschätzer $\mathcal{E}_\alpha$ ist eine Funktion von x, mit der der Wert des Parameters α geschätzt werden kann. $\hat{\alpha}$ bezeichne diesen Schätzwert. Es ist also $\hat{\alpha} = \mathcal{E}_\alpha(x)$.

Ziel ist es, eine Funktion $\mathcal{E}_\alpha$ zu finden, bei der $\hat{\alpha}$ so nah wie möglich am wahren Wert von α liegt.

Da $\hat{\alpha}$ eine Funktion von Zufallsgrößen ist, ist $\hat{\alpha}$ selbst eine Zufallsgröße.

$$p(\hat{\alpha}) = \int\limits_D \mathcal{E}_\alpha(x) p(x;\alpha)\, dx,$$

wobei α den wahren Wert des Parameters bezeichnet.

Qualitätskriterien für Punktschätzer

Konsistenz

n: Anzahl der Messungen, die für die Punktschätzung verwendet werden.
$\hat{\alpha}_n$: zugehöriger Schätzwert.
α_0: wahrer Wert von α.
Man bezeichnet $\mathcal{E}_\alpha$ als konsistenten Punktschätzer, falls $\hat{\alpha}_n$ stochastisch gegen α_0 konvergiert. D.h. die Wahrscheinlichkeit, einen von α_0 verschiedenen Wert zu schätzen, geht für $n \to \infty$ gegen 0.

Erwartungstreue

Der Bias eines Schätzwerts $\hat{\alpha}$ ist definiert als

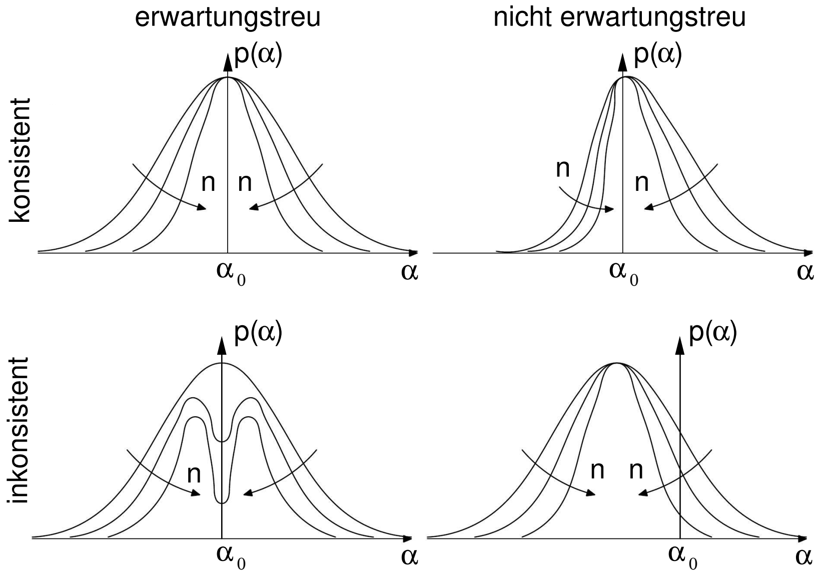
$$b_n(\hat{\alpha}) := E(\hat{\alpha}_n - \alpha_0) = E(\hat{\alpha}_n) - \alpha_0.$$

Der Punktschätzer ist erwartungstreu, wenn

$$b_n(\hat{\alpha}) = 0, \text{ also } E(\hat{\alpha}_n) = \alpha_0$$

für alle n ist.

Veranschaulichung von Konsistenz und Erwartungstreue



Weitere Qualitätskriterien für Punktschätzer

Effizienz

V_{min} sei die kleinstmögliche Varianz aller Punktschätzer eines reellwertigen Parameters. Die Effizienz eines bestimmten Punktschätzers ist als das Verhältnis $\frac{V_{min}}{Var(\hat{\alpha})}$ gegeben, wobei $Var(\hat{\alpha})$ die Varianz von $\hat{\alpha}$ für diesen Punktschätzer ist.

Suffizienz

Jede Funktion von Messdaten x nennt man eine Statistik. Eine suffiziente Statistik für α ist eine Funktion der Messdaten, die den gesamten Informationsgehalt über α enthält.

In der Hochenergiephysik verwendete Punktschätzer

Methode des maximalen Likelihoods

$p(x;\alpha)$: Wahrscheinlichkeit, die Messwerte x bei einem gegebenem Parameter α zu erhalten.

- Wenn man nun die gemessenen Werte x in die Funktion $p(x;\alpha)$ einsetzt, erhält man eine Statistik von x, die man Likelihood oder Likelihoodfunktion $L(x;\alpha)$ nennt.
- Man verwendet den Begriff des Likelihoods, um die Verwandschaft mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x;\alpha)$ anzudeuten und gleichzeitig deutlich zu machen, dass L keine Wahrscheinlichkeitsfunktion ist.

$f(x_k;\alpha)$ sei die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Ausgang einer einzelnen Messung x_k. Bei n unabhängigen Messungen $x = (x_1, \dots, x_n)$ ist dann

$$L(x_1, \dots, x_n; \alpha) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k;\alpha).$$

Bei der Methode des maximalen Likelihoods nimmt man als Schätzwert für α den Wert von α, für den $L(x;\alpha)$ maximal wird.

Asymptotisches Verhalten des maximalen Likelihoods

$n \to \infty$

- Der Punktschätzer ist konsistent.
- Der Punktschätzer ist effizient.
- $\hat{\alpha}$ ist normalverteilt.
- Wegen der Konsistenz ist der Punktschätzer asymptotisch erwartungstreu.

n endlich

Um das Verhalten des Punktschätzer bei begrenzter Datenmenge n zu bestimmen, bedient man sich in der experimentellen Praxis Ensembles zufällig erzeugter simulierter Daten, auf die man den Punktschätzer anwendet.

Methode der kleinsten Quadrate

n Messungen $x_1, \ldots, x_n$.

$E(x_k; \alpha)$: Erwartungswert von x_k bei gegebenem α („theoretische Vorhersage'' für den Wert von x_k).

$V = (cov(x_k, x_\ell))$: Kovarianzmatrix. Im Allgemeinen ist auch V eine Funktion von α.

$$Q^2 := \sum_{k,\ell=1}^{n} [x_k - E(x_k;\alpha)]\, V_{k\ell}^{-1}(\alpha)\, [x_\ell - E(x_\ell;\alpha)]\,.$$

Bei der Methode der kleinsten Quadrate wählt man als Schätzwert für α denjenigen Wert, bei dem Q^2 minimal wird.

Ziel: Bestimmung eines Intervalls, welches mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit den wahren Wert eines Parameters enthält.

Grenzfall der Normalverteilung

Nehmen wir an, die Größe $x \in \mathbb{R}$ sei normalverteilt, d.h.

$$p(x) = N(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}.$$

Wenn μ und σ bekannt sind, dann ist

$$p(a < x < b) = \int_a^b N(x;\mu,\sigma)dx =: \beta.$$

Falls μ unbekannt ist, kann man $p(\mu + c < x < \mu + d)$ berechnen:

$$\begin{aligned} \beta = p(\mu + c < x < \mu + d) &= \int_{\mu+c}^{\mu+d} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\sigma^2}} dy \\ &= p(c - x < -\mu < d - x) = p(x - d < \mu < x - c). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta = p(\mu + c < x < \mu + d) &= \int\limits_{\mu+c}^{\mu+d} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx = \int\limits_{c}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\sigma^2}} dy \\ &= p(c - x < -\mu < d - x) = p(x - d < \mu < x - c).\end{aligned}$$

D.h. wenn man x gemessen hat, ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gesuchte Wert von μ zwischen $x - d$ und $x - c$ liegt, gleich β.

- Ist x ein Parameter $\hat{\alpha}$ aus einer Punktschätzung, die mit der Methode des maximalen Likelihoods oder der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt wurde, dann ist $\hat{\alpha}$ im asymptotischen Grenzfall normalverteilt, und die obigen Formeln können zur Intervallschätzung angewendet werden.
- Die Intervalle $[a, b]$ bzw. $[x - d, x - c]$ nennt man Konfidenzintervalle. β ist das zum Konfidenzniveau gehörige Konfidenzniveau.

Verallgemeinerung auf den mehrdimensionalen Fall

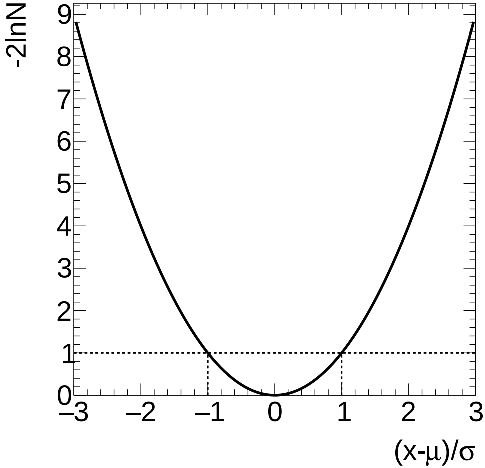
$$Q(x;\mu,\Sigma) := (x-\mu)^t\Sigma^{-1}(x-\mu), \;\; x,\mu \in |\mathrm{R}.$$

$$p(Q) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}Q(x;\mu,\Sigma)\right).$$

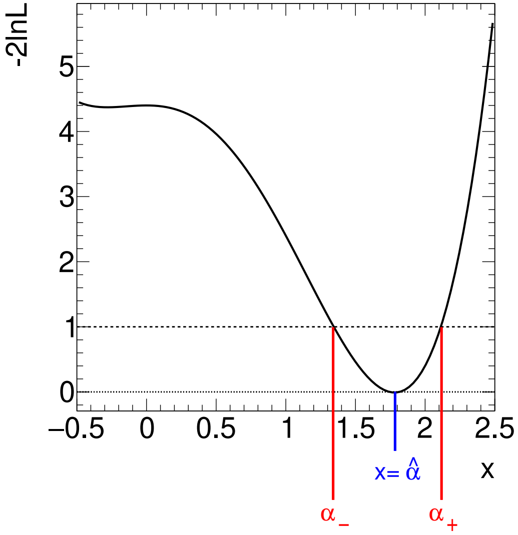
In mehreren Dimensionen wird das Konfidenzintervall zu einem Konfidenzbereich, der zum Konfidenzniveau β gehört:

$$p(Q(x;\mu,\Sigma) < K_\beta^2) = \beta.$$

$$-2\ln N(x = \mu \pm \sigma; \mu, \sigma) - [-2\ln N(x = \mu; \mu, \sigma] = 1.$$



Verallgemeinerung



Konfidenzintervall: $[\alpha_-, \alpha+]$.

Hypothesentest

Ziel, festzustellen, welche Hypothese (für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung) die aufgezeichneten Messpunktverteilungen (Daten) beschreibt.

Nomenklatur. H_0: Nullhypothese.
H_1: alternative Hypothese.

Einfache und zusammengesetzte Hypothesen

- Wenn die Hypothesen H_0 und H_1 vollständig ohne freie Parameter gegeben sind, nennt man die Hypothesen einfache Hypothesen.
- Falls eine Hypothese mindestens einen freien Parameter enthält, bezeichnet man sie als zusammengesetzte Hypothese.

Vorgehensweise

Für den Hypothesentest muss man W so wählen, dass

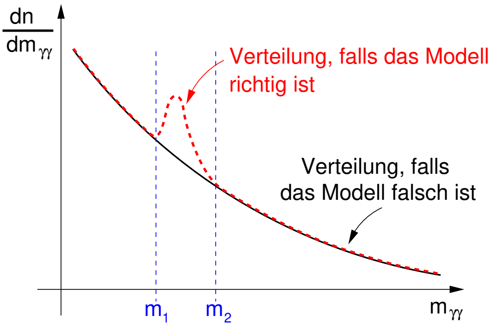
$$p(\text{Daten} \in W|H_0) = \alpha$$

bei klein zu wählendem α und gleichzeitig

$$p(\text{Daten} \in D\backslash W|H_1) = \beta$$

mit möglichst kleinem β.

Ein theoretisches Modell sagt die Existenz eines Teilchens mit der Masse M, den Produktionswirkungsquerschnitt und die partielle Breite für den Zerfall in ein Photonenpaar voraus. Um dieses Modell zu bestätigen oder zu widerlegen, muss man sich die Verteilung von $m_{\gamma\gamma}$ ansehen.

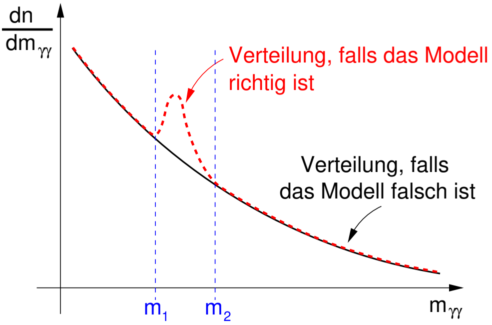


Im Intervall $[m_1, m_2]$ ist man auf die Vorhersage des Modells empfindlich. Man hat zwei Hypothesen, nämlich dass die Theorie richtig oder falsch ist.

H_0: Nullhypothese: „Theorie ist falsch.“

H_1: Alternativhypothese: „Theorie ist richtig.“

Bei genügend großer Datenmenge ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gemessene $m_{\gamma\gamma}$-Verteilung wie H_0 aussieht, klein, falls die Theorie stimmt. Gleichzeitig ist ide Wahrscheinlichkeit, dass die gemessenen Massenverteilung wie H_1 aussieht, groß.



n: Anzahl der im Intervall $[m_1, m_2]$ gemessenen Ereignisse.
Man muss nun einen Schwellenwert N so wählen, dass

$$p(n > N|H_0) = \alpha$$

mit klein zu wählendem α und

$$p(n \leq N|H_1) = \beta$$

möglichst klein ist, falls die Theorie, also H_1 richtig ist.

n: Anzahl der im Intervall $[m_1, m_2]$ gemessenen Ereignisse.
Man muss nun einen Schwellenwert N so wählten, dass

$$p(n > N|H_0) = \alpha$$

mit klein zu wählendem α und

$$p(n \leq N|H_1) = \beta$$

möglichst klein ist, falls die Theorie, also H_1 richtig ist.

Experimentelle Praxis

- $\alpha = 5,7 \cdot 10^{-7}$, was 5σ einer Normalverteilung entspricht, um die Entdeckung eines Teilchens zu behaupten.
- Bei einem Wert von $\alpha = 0,3\%$, was 3σ einer Normalverteilung entspricht, sagt man, man habe Anzeichen für die Existenz eines neuen Teilchens.

Fehler erster und zweiter Art

Das Konfidensniveau α ist als die Wahrscheinlichkeit definiert, dass $x \in W$ liegt, falls die Nullhypothese H_0 richtig ist:

$$p(x \in W|H_0) = \alpha.$$

Die Wahrscheinlichkeit β gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass man die Alternativhypothese H_1 fälschlicherweise verwirft:

$$p(x \in D \setminus W|H_1) = \beta.$$

Vorgehensweise	H_0 richtig	H_1 richtig
$x \notin W \Rightarrow H_0$ wird als richtig betrachtet	Gute Akzeptanze, da $p(x \in D \setminus W|H_0) = 1 - \alpha$ groß ist	Verunreinigung Fehler zweiter Art $p(x \in D \setminus W|H_1) = \beta$.
$x \in W \Rightarrow H_0$ wird verworfen, H_1 als richtig betracht	Fehlentscheidung Fehler erster Art $p(x \in W|H_0) = \alpha$ ist klein	Verwerfen von H_0 gut, da $p(x \in W|H_1) = 1 - \beta$ ist groß.