

Konzepte für Experimente an zukünftigen Hadroncollidern I

PD Dr. Oliver Kortner

16.11.2020

Wechselwirkung geladener Teilchen mit Materie

Zwei Effekte beim Durchgang geladener Teilchen durch Materie:

- Energieverlust
- Ablenkung von der ursprünglichen Flugbahn

Hierfür verantwortliche Prozesse:

- Inelastische Stöße an atomaren Elektronen des durchlaufenen Materials
- Elastische Streuung an den Atomkernen des Materials
- Emission von Čerenkovstrahlung
- Kernreaktionen
- Bremsstrahlung

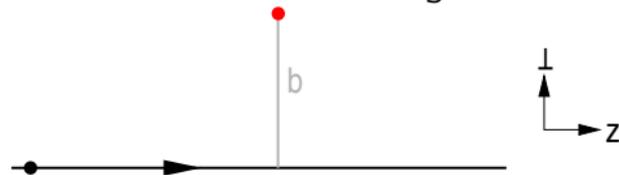
Strahlungsfeld einer beschleunigten Ladung proportional zur Beschleunigung a_{Ladung} . Die abgestrahlte Energie ist proportional zu $|\vec{E}|^2$, die proportional zu $a_{Ladung}^2 = \left(\frac{F}{m}\right)^2 \propto \frac{1}{m^2}$. Deshalb ist Bremsstrahlung bei schweren geladenen Teilchen anders als bei Elektronen ein vernachlässigbarer Prozess.

Wechselwirkung schwerer geladener Teilchen mit Materie

- Schwere geladene Teilchen: μ^\pm , π^\pm , p , \bar{p} , α -Teilchen, leichte Kerne.
- Für schwere geladene Teilchen dominante Prozesse:
 - Inelastische Stöße an atomaren Elektronen des durchlaufenen Material.
 - Elastische Streuung an den Atomkernen des Materials.

Inelastische Stöße an atomaren Elektronen

Halbklassische Betrachtung



schweres geladenes
Teilchen mit der Masse M ,
Ladung ze , Geschwindigkeit v

Impulsübertrag auf das Elektron:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e \cdot E_{\perp} dt = e \int_{-\infty}^{\infty} E_{\perp} \frac{dz}{v} = \frac{e}{v} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\perp} dz \cdot \frac{2\pi b}{2\pi b} = \frac{e}{2\pi b v} \cdot 2\pi b \int_{-\infty}^{\infty} E_{\perp} dz$$

$$\Delta p := \int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp} dt = \frac{ze^2}{2\pi\epsilon_0 b v}$$

Inelastische Stöße an atomaren Elektronen

Energiegewinn des Elektrons:

$$\Delta E(b) = \frac{(\Delta p)^2}{2m_e} = \frac{z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2 b^2}$$

N_e : Elektronendichte im Material.

⇒ Energieverlust von Elektronen im Abstand zwischen b und $b + db$ vom schweren Teilchen in einer dünnen Materialschicht dx :

$$-dE(b) = \Delta E(b) \cdot N_e \cdot 2\pi b db dx = \frac{z^2 e^4}{4\pi \epsilon_0^2 m_e v^2} \frac{1}{b} db dx$$

$$-\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} dE(b) = \frac{z^2 e^4}{4\pi \epsilon_0^2 m_e v^2} N_e \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} = \frac{z^2 e^4}{8\pi \epsilon_0^2 m_e v^2} N_e \ln \frac{b_{max}^2}{b_{min}^2}$$

Inelastische Stöße an atomaren Elektronen

Energieverlust des schweren geladenen Teilchens:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4}{8\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} N_e \ln \frac{b_{max}^2}{b_{min}^2}$$

- b_{min} ergibt sich aus dem größtmöglichen Energieübertrag an das Elektron:

$$2\gamma^2 m_e v^2 = \frac{z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2 b_{min}^2} \Leftrightarrow b_{min}^2 = \frac{z^2 e^4}{16\pi^2 \gamma^2 m_e^2 v^4 \epsilon_0^2}$$

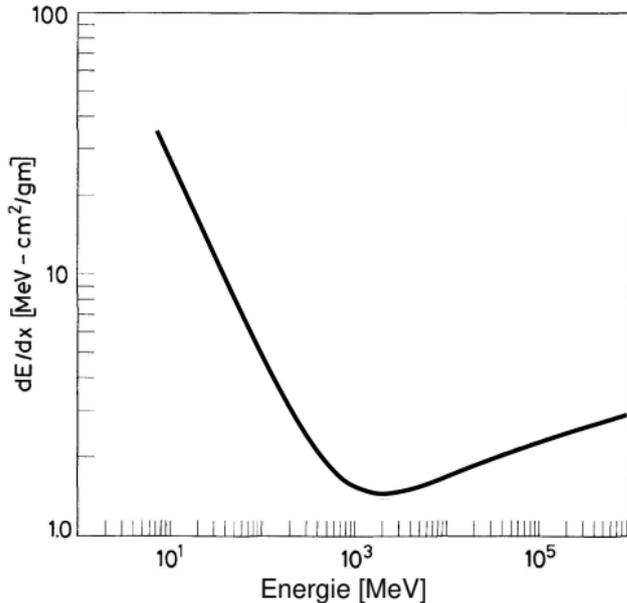
- b_{max} ergibt sich aus dem kleinstmöglichen Energieübertrag, der sich aus der Quantisierung der Bindungsenergien des Elektrons ergibt:

$$\Delta E_{min} = \frac{z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2 b_{max}^2} \Leftrightarrow b_{max}^2 = \frac{z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2} \frac{1}{\Delta E_{min}}$$

⇒ Bohrsche Näherung der Bethe-Bloch-Formel:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4}{8\pi\epsilon_0^2 m_e v^2} N_e \ln \frac{2m_e \gamma^2 v^2}{\Delta E_{min}}$$

Graphische Darstellung, minimal ionisierende Teilchen

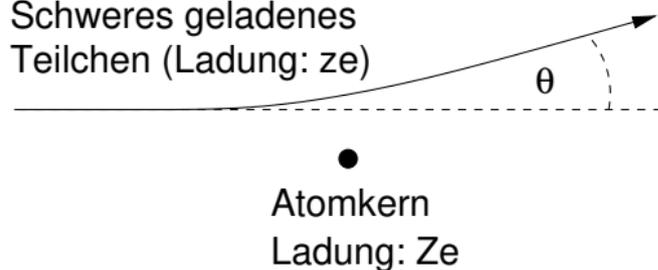


- Zunächst starke Abnahme des Energieverlusts mit steigender Energie des schweren geladenen Teilchens.
- Nach Erreichen des Minimums schwacher, nur logarithmischer Anstieg des Energieverlusts mit der Energie des schweren geladenen Teilchens.
- Teilchen, die eine Energie haben, bei denen der Energieverlust minimal ist, nennt man minimal ionisierend.

Wiederholung des Stoffs der letzten Vorlesung

Vielfachstreuung

Schweres geladenes
Teilchen (Ladung: ze)

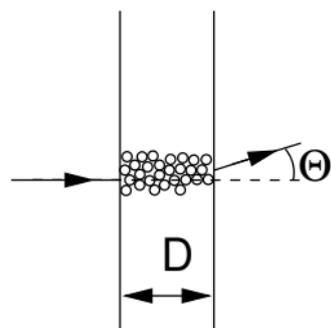


Streuung an einem einzelnen Kern:

$$\theta = \frac{\Delta p}{p} \propto \frac{z \cdot Z}{p}.$$

$$\langle \theta \rangle = 0, 0 \neq \theta_0^2 := \text{Var}(\theta) \propto \frac{z^2 \cdot Z^2}{p^2}.$$

Streuung an vielen Kernen:



$$\langle \Theta \rangle = 0$$

$$\Theta_0^2 := \text{Var}(\Theta) = \sum_{\text{Stöße}} \theta_0^2 \propto D \cdot z^2 \cdot Z^2 p^2.$$

Also erhält man $\Theta_0 \propto \frac{\sqrt{D}}{p}$.

Die genaue Rechnung ergibt

$$\theta_0 := \frac{13,6 \text{ MeV}}{E} \sqrt{\frac{d}{X_0}}.$$

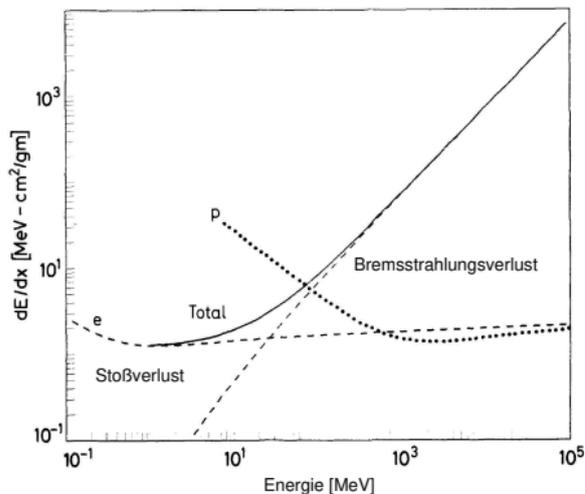
Energieverlust von Elektronen (und Positronen)

m_e ist so klein, dass die Beschleunigung, die ein Elektron in Stößen an den Atomkernen erfahren, so groß wird, dass Bremsquanten abgestrahlt werden können.

$$\left. \frac{dE}{dx} \right|_e = \left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{Stöße}} + \left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{Bremsstrahlung}} .$$

- $\left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{Stöße}}$ bezeichnet den Energieverlust durch Anregung und Ionisierung von Atomen. Die Formel hierfür ähnelt der Bethe-Bloch-Formel, enthält aber Abwandlungen, die berücksichtigen,
 - dass die Elektronen in den Stößen an atomaren Elektronen abgelenkt werden
 - und dass das einlaufende Elektron von dem atomaren Elektron ununterscheidbar ist.
- $\left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{Bremsstrahlung}}$ gibt den Energieverlust durch Bremsstrahlung an.

Kritische Energie und Strahlungslänge



Kritische Energie E_k

$$\left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{Stöße}} (E_k) = \left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{Bremsstrahlung}} (E_k).$$

$E_k \approx \frac{800 \text{ MeV}}{Z+1/2}$, weshalb oberhalb $E_{e\pm} > 1 \text{ GeV}$ Bremsstrahlung dominant ist.

Strahlungslänge X_0

$$-\left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{Bremsstrahlung}} = N \cdot E_e \cdot \Phi_{\text{Strahlung}},$$

also

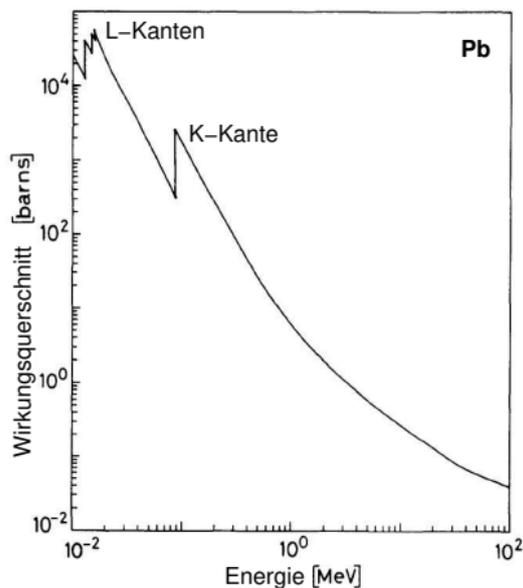
$$E_e(x) = E_e(0) e^{-\frac{x}{X_0}}.$$

Hauptprozesse

1. Lichtelektrischer Effekt
 2. Comptonstreuung
 3. e^+e^- -Paarerzeugung
- ⇒ Ein Photonenstrahl verliert beim Durchgang durch Materie nicht an Energie, sondern Intensität, weil alle drei Prozesse Photonen aus dem Strahl entfernen.

Absorption eines Photons durch ein atomares Elektron.

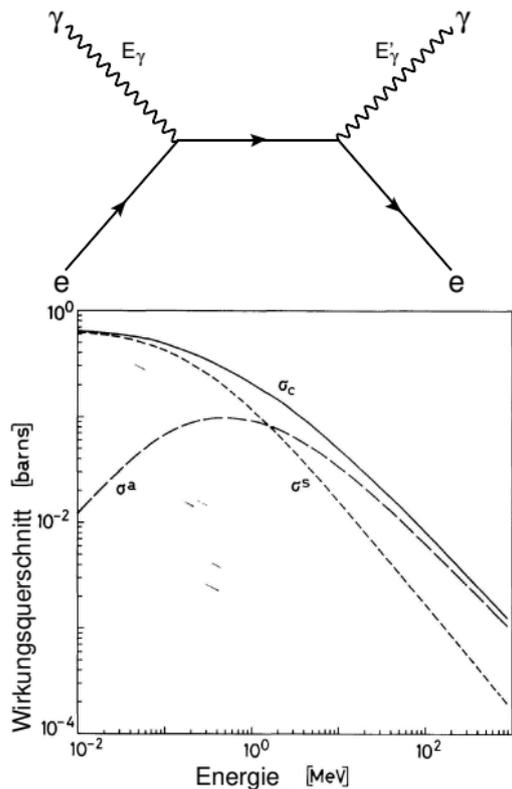
$$E_e = \hbar\omega_\gamma - \text{Bindungsenergie des Elektrons}$$



- Mit der Energie stark abfallender Wirkungsquerschnitt.
- Hochschnellen des Wirkungsquerschnitts, wenn die Photonenenergie die Bindungsenergie der Elektronen in einer Schale erreicht.
- Prozess von Bedeutung für $E_\gamma \sim 10 - 100 \text{ keV}$.

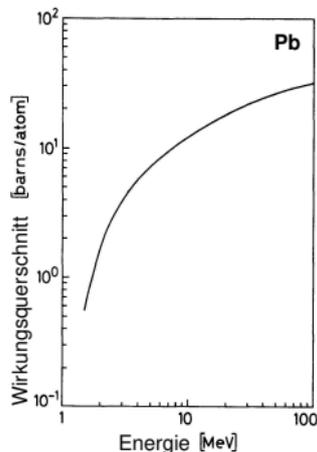
Wegen der Energie-Impuls-Erhaltung ist der Prozess an freien Elektronen verboten. Für ein anfangs ruhendes Elektron gilt nämlich

$$m_e^2 + 2E_\gamma m_e = (p_\gamma + p_{e,A})^2 = p_{e,E}^2 = m_e^2 \Rightarrow E_\gamma = 0.$$



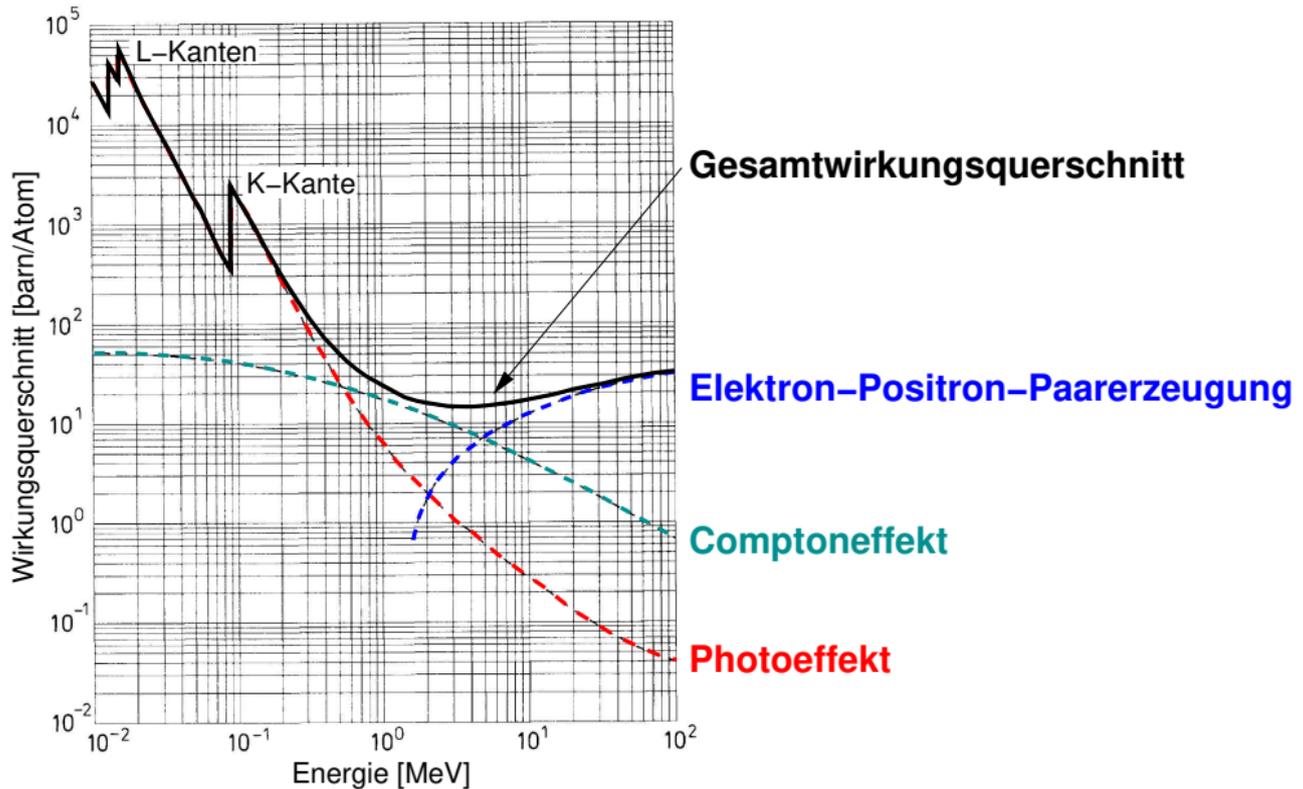
- Streuung eines Photons an einem Elektron.
- Comptonstreuungswirkungsquerschnitt gegeben durch die Klein-Nishina-Formel.
- σ_C : Comptonstreuungswirkungsquerschnitt.
- $\sigma_a := \sigma_C \frac{E'_\gamma}{E_\gamma}$, $\sigma_s := \sigma_C - \sigma_a$.
- Großer Energieübertrag an das Elektron bei $E_\gamma \sim 1$ MeV.

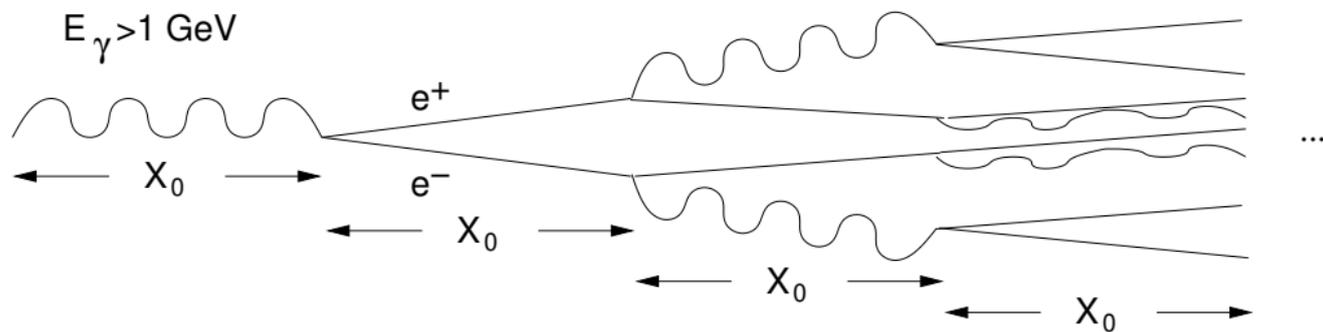
- $\gamma \rightarrow e^+e^-$ wegen Energie-Impuls-Erhaltung ($0 = p_\gamma^2 \neq (p_{e^+} + p_{e^-})^2 > 0$) nur möglich, wenn ein dritter Körper, also zum Beispiel ein Atomkern des Materials beteiligt ist, worauf das Photon trifft.
- Wirkungsquerschnitt für Paarerzeugung $\propto Z^2$ (Z: Ordnungszahl des Materials).
- $E_{\gamma,min} = 2m_e$
- Wahrscheinlichkeit für die Paarerzeugung nach einer Flugstrecke x ist proportional zu $\exp(-\frac{x}{\lambda_P})$ mit $\lambda_P \approx \frac{9}{7}X_0$.



- Mit E_γ ansteigender Wirkungsquerschnitt.
- Dominanter Prozess für $E_\gamma \gtrsim 10$ MeV.

Gesamtphotonenabsorptionswirkungswirkungsquerschnitt für Pb





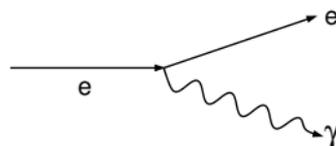
- Nach der Strecke $n \cdot X_0$: 2^n Teilchen mit Energie $E_n \approx \frac{E_\gamma}{2^n}$.
- Ende der Kaskade (des Schauers), wenn $E_n = E_k$: $n = \frac{\ln \frac{E_\gamma}{E_k}}{\ln 2}$.
- Länge des Schauers: $n \cdot X_0 = X_0 \cdot \frac{\ln \frac{E_\gamma}{E_k}}{\ln 2}$.

Beispiel

- $E_\gamma = 100 \text{ GeV}$.
 - Material: Eisen, d.h. $X_0 \approx 2 \text{ cm}$, $E_k \approx 20 \text{ MeV}$.
- $\Rightarrow n = 12$, d.h. ~ 4000 Teilchen.
Schauerlänge: $L_{longitudinal} \approx 24 \text{ cm}$.



bzw.



Kinematik in der Näherung masseloser Teilchen

Anfangszustand

Endzustand

$$p_A = (E_A, \underbrace{0, 0}_{\vec{p}_A}, E_A)$$

$$p_{1/2} = (E_{1/2}, p_{1/2,\perp}, 0, p_{1/2,\parallel})$$

$$p_{1/2}^2 = 0 \Rightarrow E_{1/2} = \sqrt{p_{1/2,\perp}^2 + p_{1/2,\parallel}^2}$$

$$p_A = p_1 + p_2$$

Kinematik in der Näherung masseloser Teilchen

Also gilt

$$p_{1,\perp} + p_{2,\perp} = 0 \Leftrightarrow p_{2,\perp} = -p_{1,\perp}$$

$$E_A = p_{1,\parallel} + p_{2,\parallel} \Leftrightarrow p_{2,\parallel} = E_A - p_{1,\parallel}$$

$$E_A = E_1 + E_2 \Leftrightarrow E_A - E_1 = E_2 = \sqrt{p_{2,\parallel}^2 + p_{2,\perp}^2} = \sqrt{(E_A - p_{1,\parallel})^2 + p_{1,\perp}^2}$$

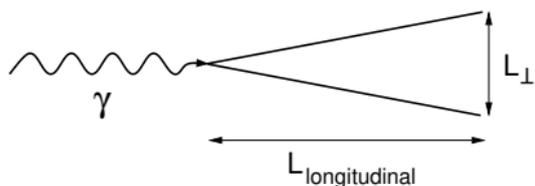
$$(E_A - E_1)^2 = (E_A - p_{1,\parallel})^2 + p_{1,\perp}^2$$

$$E_A^2 - 2E_A E_1 + E_1^2 = E_A^2 - 2E_A p_{1,\parallel} + p_{1,\parallel}^2 + p_{1,\perp}^2 = E_A^2 - 2E_A p_{1,\parallel} + E_1^2$$

$$E_1 = p_{1,\parallel} \Rightarrow p_{1,\perp} = 0 = p_{2,\perp}$$

Im Grenzfall masseloser Teilchen hat der Schauer immer dieselbe transversale Ausdehnung 0 unabhängig von E_{γ/e^\pm} .

Die volle Behandlung mit massiven Elektronen und Positronen ergibt folgendes Ergebnis.



$$L_{\perp} \approx 4R_M = 4X_0 \frac{21,2 \text{ MeV}}{E_k}$$

R_M : Molièreradius

- Die transversale Ausdehnung des Schauers L_{\perp} ist unabhängig von $E_{\gamma/e^{\pm}}$.
- $L_{T,Fe} = 4 \cdot 1,8 \text{ cm} \cdot \frac{21,2 \text{ MeV}}{30,2 \text{ MeV}} \approx 5 \text{ cm}$.
- Für elektromagnetische ist also eine kleine, von $E_{\gamma,e^{\pm}}$ unabhängige transversale Ausdehnung charakteristisch.
- Die Anzahl der erzeugten Schauerteilchen ist das Maß für $E_{\gamma,e^{\pm}}$ und ist proportional zu $E_{\gamma,e^{\pm}}$.