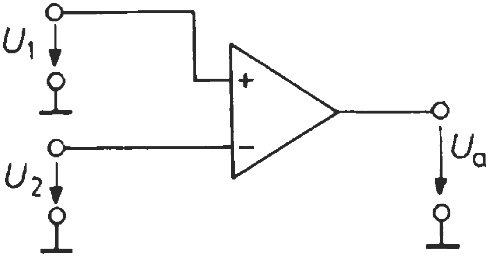
Konzepte für Experimente an zukünftigen Hadroncollidern II

PD Dr. Oliver Kortner

14.05.2020

Operationsverstärker als Komparator

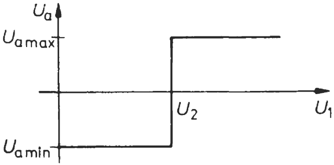
- Ein Operationsverstärker geht in Sättigung, wenn $|U_P - U_N|$ einen kleinen Wertebereich überschreitet.
- Komparatoren sind Operationsverstärker, bei denen man diesen Bereich sehr klein gewählt hat.



Im Idealfall gilt:

$$U_a = \begin{cases} U_{a,max} \; für \; U_1 > U_2, \\ U_{a,min} \; für \; U_1 < U_2. \end{cases}$$

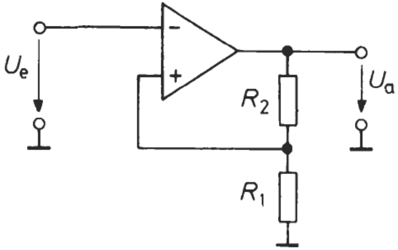
Kennlinie:



Invertierender Schmitttrigger

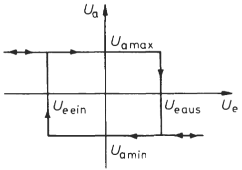
- Ein Schmitttrigger ist ein Komparator, bei dem der Ein- und der Ausschaltpegel nicht zusammenfallen.
- Ein Komparator geht in Sättigung, wenn $U_P \neq U_N$ ist.

Invertierender Schmitttrigger



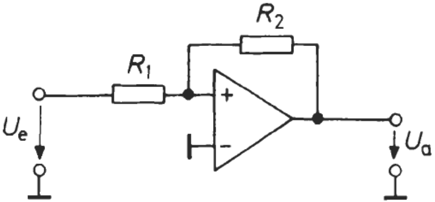
- Einschaltpegel: $U_{e,ein} = \frac{R_1}{R_1+R_2} U_{a,min}$.
- Ausschaltpegel: $U_{e,aus} = \frac{R_1}{R_1+R_2} U_{a,max}$.
- Die Differenz zwischen Ein- und Ausschaltpegel nennt man die Schalthysterese.

Übertragungskennlinie:



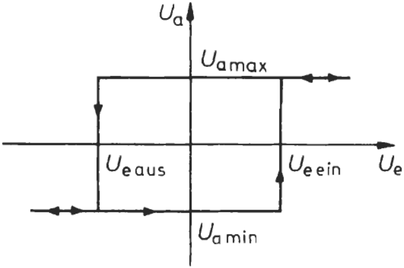
Nichtinvertierender Schmitttrigger

Schaltung



- Einschaltpegel: $U_{e,ein} = -\frac{R_1}{R_2} U_{a,min}$.
- Ausschaltpegel: $U_{e,aus} = -\frac{R_1}{R_2} U_{a,max}$.

Übertragungskennlinie:

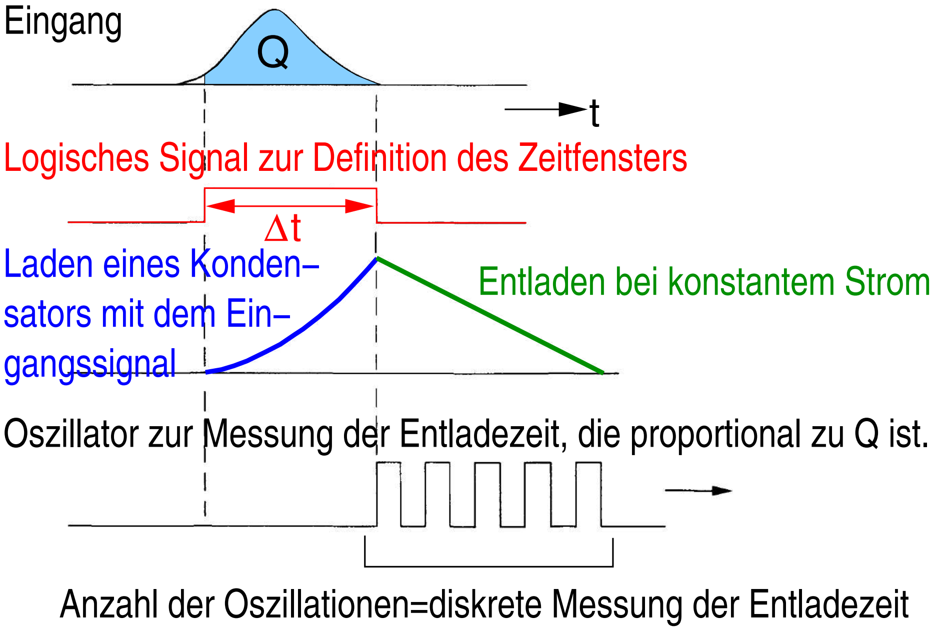


Analog-Digital-Wandler

Man unterscheidet zwei Grundtypen von Analog-Digital-Wandlern.

- Ladungsempfindlicher Analog-Digital-Wandler
  Messung von
  $$Q := \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} I(t)\,dt$$
  und Umwandlung des Messwertes in eine ganze Zahl.
- Amplitudenempfindlicher Analog-Digital-Wandler
  Messung des Höchstwertes eines Signals $U(t)$ im Intervall $[t_0, t_0 + \Delta t]$ und Umwandlung des Messwertes in eine ganze Zahl.

Wilkinsonsche Methode zur Ladungsmessung



Wägungsmethode zur Signalhöhenmessung

Unterteilung des dynamischen Bereichs des Analog-Digital-Wandlers in eine Reihe Vergleichsspannungen.

Umsetzung des Ergebnisses der Spannungsvergleiche in ein Bitmuster.

Zeit-Digital-Wandler

Analogsignal $\rightarrow$ Komparator $\rightarrow$ Logisches Signal $\rightarrow$ Zeitmesser

Einfachste Vorgehensweise bei der Zeitmessung

- Taktgeber mit einer Periodendauer T, die kleiner als die angestrebte Zeitmessgenauigkeit ist.
- Fortlaufendes Zählen der Takte. Verwendung eines Zählers mit n Bits, so dass $2^n \cdot T >$(zu messende Zeitintervalle) ist.
- Festhalten, zu welchen Takten n_{Start} und n_{Stop} die Start- und Stopsignale eingetroffen sind.
  $t_{Start} - t_{Stop}$ wird dann als $n_{Start} - n_{Stop}$ gemessen.
  Falls der Zähler überläuft, muss man $n_{Start} - n_{Stop} + 1$ verwenden.

Logische Grundfunktionen

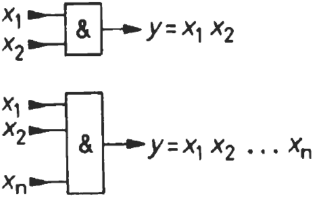
Zwei Zustände: logische 0 und logische 1.

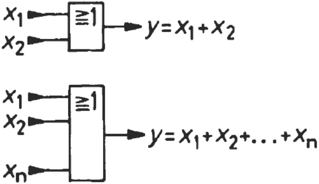
Logische Grundfunktionen

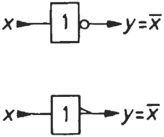
- Konjunktion: $y = x_1 \wedge x_2 = x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2$.
- Disjunktion: $y = x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2$.
- Negation: $y = \bar{x}$.

Schaltelemente für logische Grundfunktionen

Konjunktion Undschaltung	Disjunktion Oderschaltung	Negation Nichtschaltung







Methode der disjunktiven Normalform

Zur Aufstellung komplexerer logischer Funktionen kann man sich der sogenannten disjunktiven Normalform bedienen.

n Eingangsvariablen $x_1, \ldots, x_n$. 1 Ausgangsvariable y.

1. Man stelle eine Tabelle auf, in der zu allen möglichen Eingangswerten der gewünschte Ausgangswert steht. Diese Tabelle nennt man auch Wahrheitstafel.
2. Man sucht in der Wahrheitstafel alle Zeilen auf, in denen $y = 1$ ist.
3. Von jeder dieser Zeilen bildet man die Konjunktion aller Eingangsvariablen; wenn $x_k = 1$ ist, setzt man x_k ein, sonst $\bar{x}_k$.
4. Die gesuchte Funktion erhält man schließlich, indem man die Disjunktion aller gefundenen Produktterme bildet.

Grundlagen der statistischen Behandlung experimenteller Daten

Beispiel: Messung der Energie eines monoenergetischen Teilchenstrahls.

Bezeichnungen

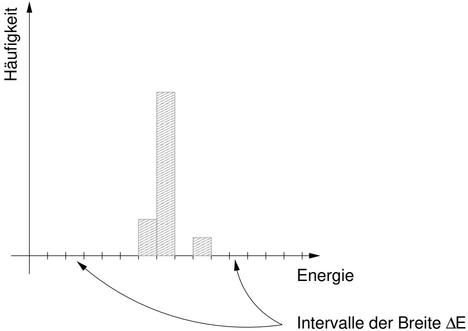
E_S: tatsächliche Strahlenergie.

N: Anzahl der Messungen der Strahlenergie.

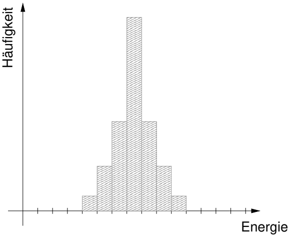
E_k: Ergebnis der k-ten Messung der Strahlenergie.

Häufigkeitsverteilungen

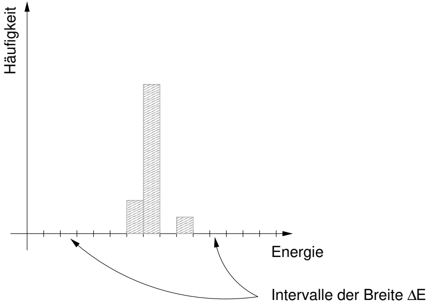
N klein



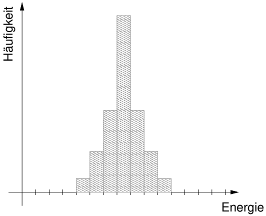
N groß



N klein

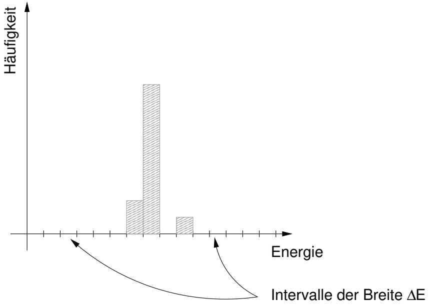


N groß

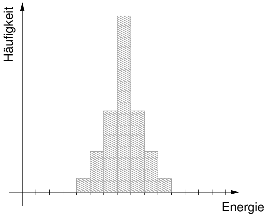


- Wenn N groß ist, erhält man bei Wiederholung der N Messungen (nahezu) dieselbe Häufigkeitsverteilung.
- Im Grenzfall $N \to \infty$ stimmt die Häufigkeitsverteilung mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Ausgang der Messung überein.

N klein



N groß



- Die Wahrscheinlichkeit, E_k zu messen, wenn die Strahlenergie E_S ist, hängt vom Wert von E_S und dem Messverfahren ab. Wenn man die Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(E_k; E_S)$ kennt, kann man über die Messung der Häufigkeitsverteilung auch E_S bestimmen.
- In der Praxis kennt man $p(E_k; E_S)$ nur begrenzt, und man versucht aus der gemessenen Häufigkeitsverteilung auf $p(E_k; E_S)$ zu schließe, woraus man einen Schätzwert von E_S erhält. In der Statistik beschäftigt man sich mit Verfahren, um aus Häufigkeitsverteilungen zu den zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu gelangen.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Eine physikalische Messung ist ein Zufallsprozess.
- Eine Messgröße x, die den Ausgang eines Zufallsprozesses angibt, bezeichnet man als eine Zufallsvariable oder Zufallsgröße.
- Jede Funktion von x ist ebenfalls eine Zufallsgröße.
- Falls die Zufallsgröße nur diskrete Werte annehmen kann, gibt es für das Auftreten jedes dieser Werte einen Wahrscheinlichkeit, was die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist.
- Bei Zufallsvariablen mit kontinuierlichem Wertebereich ersetzt die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion. Es sei Ω eine messbare Menge möglicher Werte von x, deren Maß größer Null ist. Dann ist

$$\int_{\Omega} p(x) dx$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Wert $x \in \Omega$ zu beobachten.

Axiomatische Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Das mathematische Fachgebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie fußt auf Kolmogorovs Axiomen.

Kolmogorovaxiome

Σ bezeichne eine Ereignismenge.

1. Für jedes Ereignis $A \in \Sigma$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von A eine rellel Zahl $p(A) \in [0, 1]$.
2. Das sichere Ereignis $S \in \Sigma$ hat die Wahrscheinlichkeit $p(S) = 1$.
3. Die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung abzbar vieler inkompatibler Ereignisse ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. Dabei heißen Ereignisse A_k inkompatibel, wenn sie paarweise disjunkt sind, also $A_k \cap A_\ell = \emptyset$ für alle $k \neq \ell$ gilt.

Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Bemerkung. In diesem Abschnitt betrachten wir Wahrscheinlichkeitsdichten. Wahrscheinlichkeitsfunktionen diskreter Variablen sind ebenfalls abgedeckt, wenn man die δ-Distribution auch als eine Wahrscheinlichkeitsdichte ansieht.

Nomenklatur.
D: Wertebereich einer Zufallsgröße $x = (x_1, ..., x_n)$.
$p(x)$: Wahrscheinlichkeitsdichte von x.
(D ist der Definitionsbereich von p.)

Definitionen

Der Erwartungswert von x, $E(x)$ (auch $< x >$) ist definiert als

$$E(x) := \int_D x \cdot p(x)\, dx.$$

Die Kovarianzmatrix $cov(x_k, x_l)$ ist definiert als

$$cov(x_k, x_l) :=< (x_k - < x_k >) \cdot (x_l - < x_l >) > .$$

Das Diagonalelement $cov(x_k, x_k)$ nennt man die Varianz von x_k, $Var(x_k)$, $\sqrt{Var(x_k)}$ die Standardabweichung $\sigma(x_k)$.

Erwartungswert einer Funktion einer Zufallsgröße

- Eine Funktion $f(x)$ ist ebenfalls eine Zufallsgröße.

$$< f >= \int_D f(x)p(x)\,dx.$$

- Wenn $f(x) = f(x- < x > + < x >)$ nur für kleine Werte von $|x- < x >|$ deutlich von 0 verschieden ist, kann man $f(x)$ durch

$$f(< x >) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{<x>} \cdot (x- < x >)$$

annähern. Dann ist

$$\begin{aligned}
{\color{blue}< f >} \quad & {\color{blue}\approx} \quad \left\langle f(< x >) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{<x>} \cdot (x- < x >) \right\rangle \\
& = \quad < f(x) > + \left\langle \left.\frac{df}{dx}\right|_{<x>} \cdot (x- < x >) \right\rangle \\
& = \quad f(< x >) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{<x>} \cdot (< x > - < x >) = {\color{blue}f(< x >).}
\end{aligned}$$

Varianz einer Funktion einer Zufallsgröße

Sonderfall: $f(x) \in |\mathrm{R}$.

$$
\begin{aligned}
Var(f) &= \left\langle (f - <f>)^2 \right\rangle = \langle [f - f(<x>)] \rangle \\
&\approx \left\langle \left[\sum_{k=1}^{n} \left.\frac{df}{dx_k}\right|_{<x>} \cdot (x_k - <x_k>) \right]^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \left[\sum_{k,\ell=1}^{n} \left.\frac{df}{dx_k}\right|_{<x>} \left.\frac{df}{dx_\ell}\right|_{<x>} \cdot (x_k - <x_k>) \cdot (x_\ell - <x_\ell>) \right] \right\rangle \\
&= \sum_{k,\ell=1}^{n} \left.\frac{df}{dx_k}\right|_{<x>} \left.\frac{df}{dx_\ell}\right|_{<x>} \cdot \langle (x_k - <x_k>) \cdot (x_\ell - <x_\ell>) \rangle \\
&= \sum_{k,\ell=1}^{n} \left.\frac{df}{dx_k}\right|_{<x>} \left.\frac{df}{dx_\ell}\right|_{<x>} \cdot cov(x_k, x_\ell),
\end{aligned}
$$

was die bekannte Fehlerfortpflanzungsformel ist.

Beispiele wichtiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Die Binomialverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit an, n_k Ereignisse aus insgesamt N Ereignissen zu beobachten, wenn ν_k Ereignisse erwartet werden:

$$p(n_k; \nu_k) = \binom{N}{n_k} \left(\frac{\nu_k}{N}\right)^{n_k} \left(1 - \frac{\nu_k}{N}\right)^{N-\nu_k} .$$

- Mit $p := \frac{\nu_k}{N}$ erhält man aus

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dp} 1 = \frac{d}{dp} \sum_{n_k=0}^{N} \binom{N}{n_k} p^{n_k} (1-p)^{N-n_k} \\
&= \sum_{n_k=0}^{N} \binom{N}{n_k} \left[n_k p^{n_k-1} (1-p)^{N-n_k} - (N-n_k) p^{n_k} (1-p)^{N-n_k-1} \right] \\
&= \frac{1}{p} < n_k > - \frac{1}{1-p} < N - n_k > = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \right) < n_k > + \frac{N}{1-p} \\
&= \frac{1}{p(1-p)} < n_k > + \frac{N}{1-p} \Leftrightarrow < n_k > = N \cdot p = N \cdot \frac{\nu_k}{N} = \nu_k .
\end{aligned}$$

- Mit dem gleichen Rechentrick erhält man $Var(n_k) = \nu_k (1 - \frac{\nu_k}{N})$.