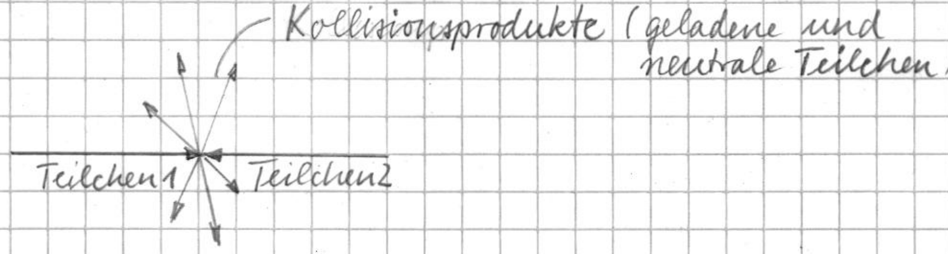
Colliderkonfiguration



Zur Kollision gebrachte Teilchen 1 und 2:

- e^-p, e^+p (HERA)
- e^+e^- (LEP, FCC-ee)
- $p\bar{p}$ ($Sp\bar{p}S$, TeVatron)
- pp (LHC, FCC-hh)

Physikalische Beschreibung der Teilchen im Anfangs- und Endzustand

Bei den von uns betrachteten Experimenten sind die Teilchen im Anfangs- und Endzustand hochenergetisch:

$|\vec{p}| \gtrsim 1\,\mathrm{GeV}/c$

$\Longrightarrow$ de-Broglie-Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{p} \lesssim \frac{hc}{1\,\mathrm{GeV}} \approx 1\,\mathrm{fm}$

Typische Auflösung positionsempfindlicher Teilchendetektoren $\sim 1\,\mu\mathrm{m}$

Somit kann man die Flugbahnen der Teilchen klassisch beschreiben. Bei den Stößen bzw. der Wechselwirkung der Teilchen ist eine quantenmechanische Behandlung erforderlich.

Wiederholung der wichtigstens Formeln der relativistischen Kinematik

Von nun an werden wir ein Einheitensystem verwenden, in dem $\hbar = 1 = c$ ist.

Nützliche Umrechnungen ins SI-System:

$$\hbar c = 197{,}3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}, \quad (\hbar c)^2 = 0{,}3894 \,(\text{GeV})^2 \text{mb}.$$

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m mit der Energie E und dem Dreierimpuls $\vec{p}$. $p := (E, \vec{p})$ ist ein Vierervektor, weshalb die Größe

$$p^2 := E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$$

lorentzinvariant, d.h. ihr Wert in jedem Inertialsystem gleich groß ist.

Geschwindigkeit des Teilchens: $\vec{\beta} \left(= \frac{v}{c}\right)$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \underset{c=1}{=} \frac{m\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E^2 = m^2 + |\vec{p}|^2 = m^2 + \frac{m^2\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{m^2 - m^2\beta^2 + m^2\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{m^2}{1-\beta^2},$$

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{also} \quad \underline{\vec{\beta} = \frac{\vec{p}}{E}}.$$

Lorentztransformation

Wenn wir das Teilchen von einem Bezugsystem B' verfolgen, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{\beta}_{B'}$ gegenüber unserem ursprünglichen Bezugsystem B bewegt, dann müssen wir zunächst den Impuls $\vec{p}$ in eine Komponente $\vec{p}_{\parallel}$ parallel und eine Komponente $\vec{p}_{\perp}$ senkrecht zu $\vec{\beta}_{B'}$ zerlegen, um den Impuls $p_{B'}$ des Teilchens im System B' zu erhalten.
Mit $\gamma_{B'} := \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{B'}^2}}$ gilt

$$\begin{pmatrix} E_{B'} \\ p_{\parallel,B'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{B'} & -\gamma_{B'}\beta_{B'} \\ -\gamma_{B'}\beta_{B'} & \gamma_{B'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{p}_{\perp,B'} = \vec{p}_{\perp}.$$

System zweier Teilchen

Teilchen 1: m_1, $p_1 = (E_1, \vec{p}_1)$

Teilchen 2: m_2, $p_2 = (E_2, \vec{p}_2)$

Die Summe zweier Viererimpulse ist wiederum ein Viererimpuls, so auch $p_1 + p_2$. Daher ist $s := (p_1+p_2)^2$ eine lorentzinvariante Größe. Um ihre physikalische Bedeutung zu verstehen, können wir sie im Schwerpunktsystem des Zweiteilchensystems berechnen. Im Schwerpunktsystem ist $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$, mithin

$$(p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 = s$$

$\sqrt{s}$ ist nichts anderes als die Gesamtenergie des Zweiteilchensystems im Schwerpunktsystem. $\sqrt{s}$ nennt man die Schwerpunktsenergie.

Beispiel: Stoß zweier Teilchen

Anfangszustand: $p_1 = (E_1, \vec{p}_1)$, $p_2 = (m_2, 0)$

Geschwindigkeit des Schwerpunkts: $\vec{\beta}_{SP} = \frac{\vec{p}_1}{E_1 + m_2}$, $\gamma_{SP} = \frac{E_1 + m_2}{\sqrt{s}}$.

Impuls des Teilchens 2 im Schwerpunktsystem:

$$\begin{pmatrix} E_2' \\ p_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{SP} & -\gamma_{SP}\beta_{SP} \\ -\gamma_{SP}\beta_{SP} & \beta_{SP} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{SP} m_2 \\ -\gamma_{SP}\beta_{SP} m_2 \end{pmatrix}$$

Maximaler Impulsübertrag auf das Teilchen 2, wenn das Teilchen 2 nach dem Stoß den Impuls $-p_2'$ im Schwerpunktsystem hat. Rücktransformation ins Ausgangssystem ergibt

$$\begin{pmatrix} E_{2,E} \\ p_{2,E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_{SP} & \gamma_{SP}\beta_{SP} \\ \gamma_{SP}\beta_{SP} & -\beta_{SP} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{SP} m_2 \\ -\gamma_{SP}\beta_{SP} m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\gamma_{SP}^2 \\ 2\gamma_{SP} \end{pmatrix} \beta_{SP}^2 m_2 .$$

Wechselwirkung von Teilchen mit Materie

1. Wechselwirkung schwerer geladener Teilchen mit Materie

Zwei Effekte beim Durchgang geladener Teilchen durch Materie:

- Energieverlust,
- Ablenkung von der ursprünglichen Flugbahn.

Hierfür verantwortliche Prozesse:

a) Inelastische Stöße an atomaren Elektronen des durchlaufenen Materials,

b) elastische Streuung an den Atomkernen des Materials,

c) Emission von Čerenkovstrahlung,

d) Kernreaktionen,

e) Bremsstrahlung.

Für schwere geladene Teilchen dominante Prozesse: a) und b).

Was bezeichnet man als schwere geladene Teilchen?

$\mu^\pm$, $\pi^\pm$, $p, \bar{p}$, α-Teilchen, leichte Kerne.

Inelastische Stöße an atomaren Elektronen: Bethe-Bloch-Formel

Halbklassische Betrachtung

schwerer geladenes Teilchen mit der Masse M, Ladung $z \cdot e$, Geschwindigkeit v.

Impulsübertrag auf das Elektron:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_\perp \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e \cdot E_\perp \, dt = e \int_{-\infty}^{\infty} E_\perp \frac{dz}{v} = \frac{e}{v} \int_{-\infty}^{\infty} E_\perp \, dz \cdot \frac{2\pi b}{2\pi b} =$$

$$= \frac{e}{2\pi b v} \cdot \underbrace{2\pi b \int_{-\infty}^{\infty} E_\perp \, dz}_{\text{Fluss durch Mantel des Zylinders mit Radius } b \text{ um das schwere Teilchen}} = \frac{e}{2\pi b v} \cdot \frac{ze}{\varepsilon_0} = \underline{\frac{z e^2}{2\pi \varepsilon_0 b \cdot v}} =: \Delta p$$

Energiegewinn des Elektrons:

$$\Delta E(b) = \frac{(\Delta p)^2}{2 m_e} = \frac{z^2 e^4}{8\pi^2 \varepsilon_0^2 m_e v^2 b^2}$$

N_e: Elektronendichte im Material.

$\Rightarrow$ Energieverlust von Elektronen im Abstand zwischen b und $b+db$ vom schweren Teilchen in einer dünnen Materialschicht dx:

$$-dE(b) = \Delta E(b) \cdot N_e \cdot 2\pi b\, db\, dx = \frac{z^2 e^4}{4\pi \varepsilon_0^2 m_e v^2} \frac{1}{b}\, db\, dx\,.$$

$$-\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} dE(b) = \frac{z^2 e^4}{4\pi \varepsilon_0^2 m_e v^2} N_e \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} = \frac{z^2 e^4}{8\pi \varepsilon_0 m_e v^2} N_e \ln \frac{b_{max}^2}{b_{min}^2}$$

b_{min} ergibt sich aus dem größtmöglichen Energieübertrag an das Elektron:

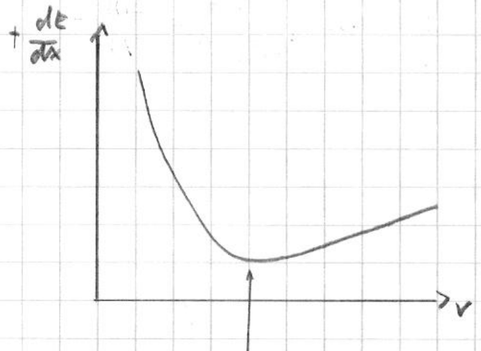
$$2\gamma^2 m_e v^2 = \frac{z^2 \cdot e^4}{8\pi^2 \varepsilon_0^2 m_e v^2 b_{min}^2} \Leftrightarrow b_{min}^2 = \frac{z^2 e^4}{16\pi^2 \gamma^2 m_e^2 v^4 \varepsilon_0^2}$$

b_{max} ergibt sich aus dem kleinstmöglichen Energieübertrag, der aus der Quantisierung der Bindungsenergie des Elektrons ergibt:

$$\Delta E_{min} = \frac{z^2 e^4}{8\pi^2 \varepsilon_0^2 m_e v^2 b_{max}^2} \Leftrightarrow b_{max}^2 = \frac{z^2 e^4}{8\pi^2 \varepsilon_0^2 m_e v^2} \frac{1}{\Delta E_{min}}$$

$$\boxed{-\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4}{8\pi \varepsilon_0^2 m_e v^2} N_e \ln \frac{2 m_e \gamma^2 v^2}{\Delta E_{min}}}$$

(Bohrsche Näherung der <u>Bethe-Bloch-Formel</u>)



Teilchen mit diesem v nennt man <u>minimal ionisierend</u>

<u>Skalierungsverhalten der Bethe-Bloch-Formel</u>

Betrachte ein- und dasselbe Material, aber Teilchen verschiedener Masse und Ladung

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 f(\beta).$$

$E_{kin} = (\gamma - 1) M c^2$, d.h. $\beta = g\left(\frac{E_{kin}}{M}\right)$, also

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 \tilde{f}\left(\frac{E_{kin}}{M}\right).$$

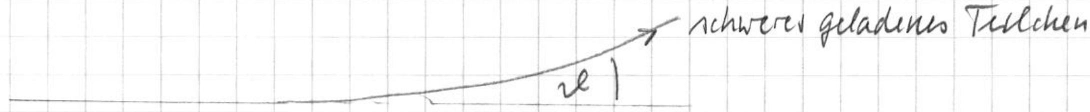
$$-\frac{dE}{dx}\bigg|_{\text{Teilchen 2}}(E_{kin,2}) = z_2^2\, \mathcal{F}\left(\frac{E_{kin,2}}{M_2}\right)$$

$$-\frac{dE}{dx}\bigg|_{\text{Teilchen 1}}(E_{kin,1}) = z_1^2\, \mathcal{F}\left(\frac{E_{kin,1}}{M_1}\right).$$

$$-\frac{dE}{dx}\bigg|_{\text{Teilchen 1}}\left(E_{kin,2}\cdot\frac{M_1}{M_2}\right) = z_1^2\, \mathcal{F}\left(\frac{E_{kin,2}}{M_2}\right) = \frac{z_1^2}{z_2^2}\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Teilchen 2}}(E_{kin,2}),$$

$$\underline{-\frac{dE}{dx}\bigg|_{\text{Teilchen 2}}(E_{kin,2}) = \frac{z_2^2}{z_1^2}\,\frac{dE}{dx}\bigg|_{\text{Teilchen 1}}\left(E_{kin,2}\cdot\frac{M_1}{M_2}\right).}$$

<u>Vielfachstreuung</u>



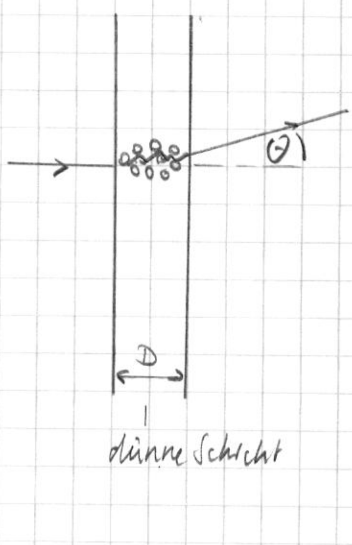
Atomkern
Ladung: Ze

$$\vartheta = \frac{\Delta p_\perp}{p} \propto \frac{z\cdot Z}{p}$$

$$\langle \vartheta \rangle = 0.$$

$$\mathrm{Var}(\vartheta) \neq 0$$

$$\vartheta_0^2 := \mathrm{Var}(\vartheta) \propto \frac{z^2 Z^2}{p^2}$$



$$\langle \Theta \rangle = 0.$$

$$\Theta_0^2 := \mathrm{Var}(\Theta) = \sum_{\text{Stöße}} \vartheta_0^2 \propto D\cdot\frac{z^2 Z^2}{p^2}$$

$$\boxed{\Theta_0 \propto \frac{zZ}{p}\sqrt{D}}$$

Genaue Rechnung gibt

$$\Theta_0 = \frac{13{,}6\,\mathrm{MeV}}{p\cdot c}\sqrt{\frac{D}{X_0}}$$

X_0: Strahlungslänge des durchquerten Materials