

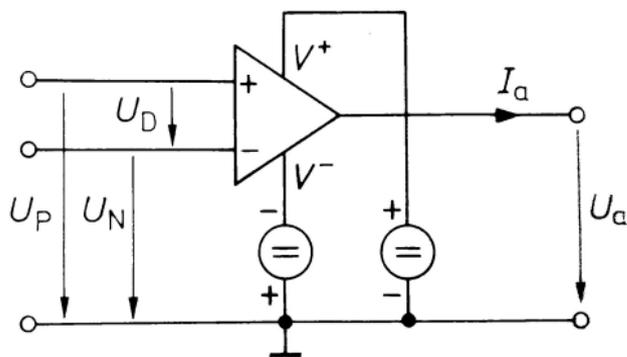
Konzepte für Experimente an zukünftigen Hadroncollidern II

PD Dr. Oliver Kortner

13.05.2022

Operationsverstärker

- Operationsverstärker sind breitbandige Differenzverstärker mit hoher Verstärkung und hohem Eingangswiderstand.
- Operationsverstärker sind als integrierte Schaltungen aus Bipolar- und Feldeffekttransistoren erhältlich.

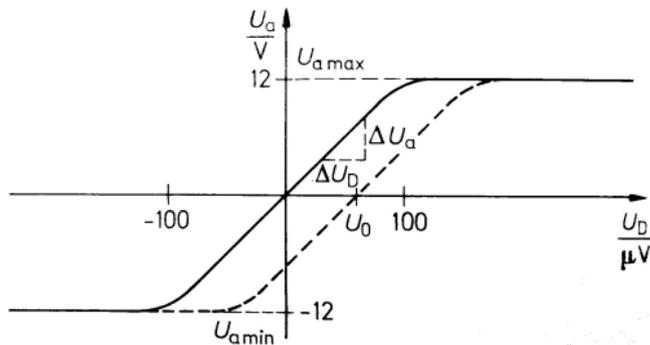


- Eingangsstufe als Differenzverstärker ausgeführt, daher zwei Eingänge (+ und -).
- Positive und negative Versorgungsspannung nötig, um die Ein- und Ausgänge positiv und negativ aussteuern zu können.

- Offene Verstärkung:

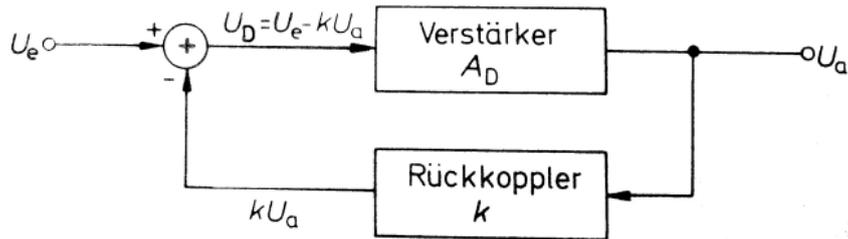
$$A_D := \frac{dU_a}{dU_D}.$$

Kennlinie eines Operationsverstärkers



- Offsetspannung U_0 bei den meisten Operationsverstärkern abgleichbar.
- Lineare Abhängigkeit von U_a von U_D in einem kleinen Bereich von U_D um U_0 .
- Konstante Ausgangsspannung außerhalb dieses Bereichs (Übersteuerung des Verstärkers).

Prinzip der Gegenkopplung

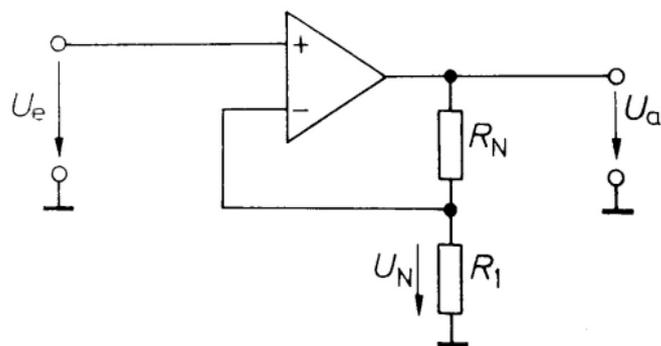


- $U_a = A_D(U_e - kU_a) \Leftrightarrow U_a = \frac{A_D}{1+kA_D} U_e \underset{A_D \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{k} U_e.$
- $U_P = U_e, U_N = kU_a, |U_a| < \text{const.}$ Also ist

$$|U_P - U_N| = \frac{U_a}{A_D} \xrightarrow{A_D \rightarrow \infty} 0,$$

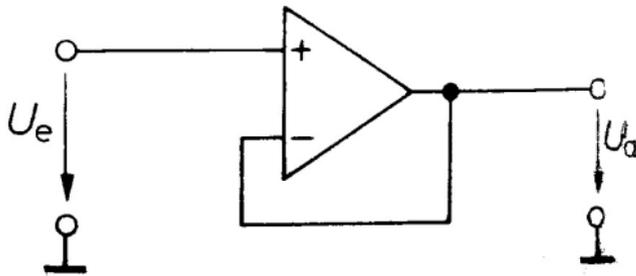
d.h. $U_P = U_N$.

Nichtinvertierender Verstärker



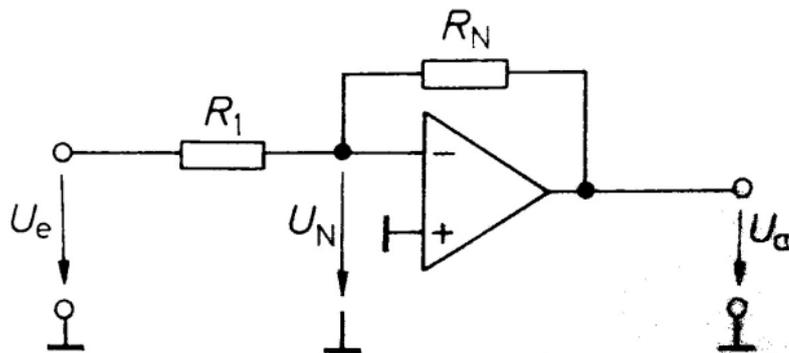
$$U_e = U_P = U_N = \frac{R_1}{R_1 + R_N} U_a$$
$$\Leftrightarrow U_a = \left(1 + \frac{R_N}{R_1}\right) U_e.$$

- Verstärkung positiv.
- Wert der Verstärkung durch die Wahl von R_N und R_1 vollständig festgelegt.



- $U_a = U_e$.
- Kleiner Ausgangswiderstand, d.h. Verhalten wie eine Spannungsquelle.
- Verwendung dieser Schaltung als Impedanzwandler.

Invertierender Verstärker

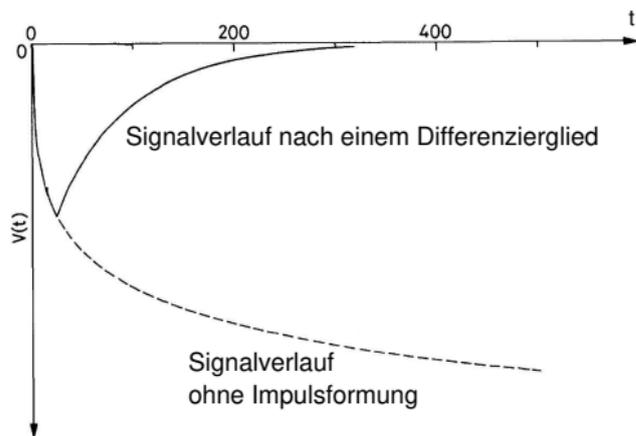


$$U_P = U_N = 0.$$

$$\Rightarrow \underline{U_a} = R_N \cdot I_N = R_N(-I_1) = -R_N \frac{U_e}{R_1} = \underline{\underline{-\frac{R_N}{R_1} U_e}}.$$

- Verstärkung negativ.
- Wert der Verstärkung durch die Wahl von R_N und R_1 vollständig festgelegt.

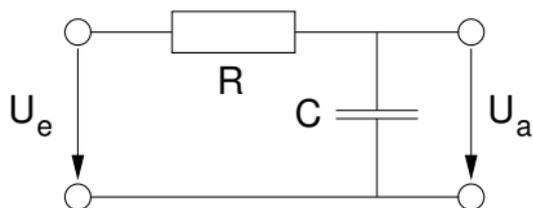
Einführendes Beispiel: Signalimpuls eines zylindrischen Driftrohres



Impulsformung mit einem Differenzierglied

- erhält die Information der Signalanfangszeit,
- verkürzt die Totzeit des Rohres gegenüber dem Fall ohne Impulsformung erheblich.

Tiefpass

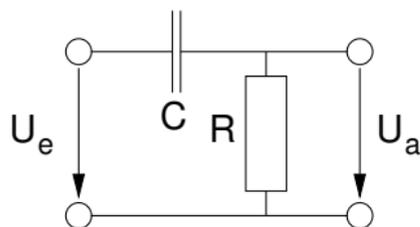


$$\begin{aligned}U_a &= \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} U_e \\ &= \frac{1}{1 + i\omega RC} U_e.\end{aligned}$$

$$\omega \rightarrow 0: U_a \rightarrow U_e.$$

$$\omega \rightarrow \infty: U_a \rightarrow 0.$$

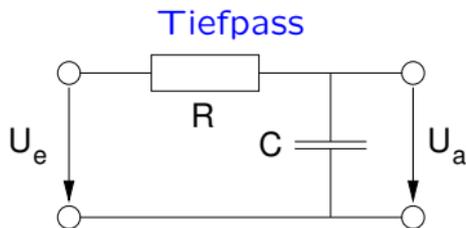
Hochpass



$$\begin{aligned}U_a &= \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} U_e \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{i\omega RC}} U_e.\end{aligned}$$

$$\omega \rightarrow 0: U_a \rightarrow 0.$$

$$\omega \rightarrow \infty: U_a \rightarrow U_e.$$



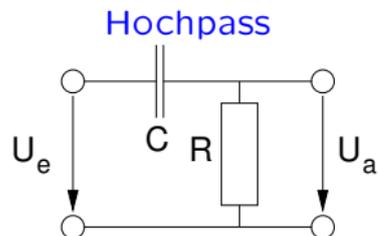
$$U_a = \frac{1}{1 + i\omega RC} U_e.$$

3dB-Grenzfrequenz

$$\frac{1}{|1 + i\omega RC|^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{RC}.$$

$\omega \gg \frac{1}{RC}$: $U_a \approx \frac{1}{i\omega RC} U_e = \frac{\hat{U}_e(\omega)}{i\omega RC} e^{i\omega t}$,
also $U_a \approx \frac{1}{RC} \int U_e dt$.

Oberhalb der Grenzfrequenz integrierend.



$$U_a = \frac{1}{1 + \frac{1}{i\omega RC}} U_e.$$

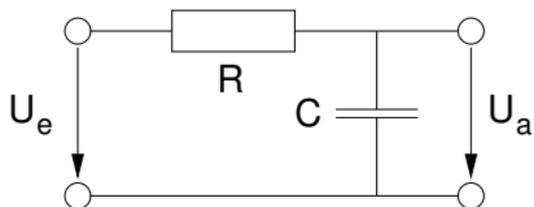
3dB-Grenzfrequenz

$$\frac{1}{|1 + \frac{1}{i\omega RC}|^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{RC}$$

$\omega \ll \frac{1}{RC}$:

$U_a \approx i\omega RC U_e = i\omega RC \hat{U}_e e^{i\omega t}$, also
 $U_a \approx RC \frac{dU_e}{dt}$.

Oberhalb der Grenzfrequenz differenzierend.



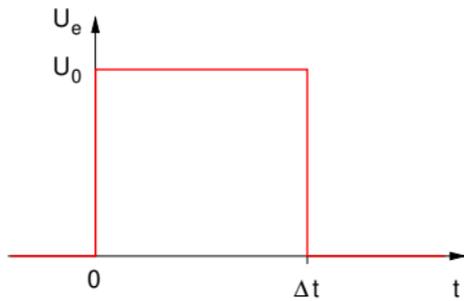
1. **Möglichkeit:** Verwendung komplexer Impedanzen und einer Fouriertransformation vom Frequenz- in den Zeitraum.

2. **Möglichkeit:** Lösung der folgenden Differentialgleichung.

$$U_a = \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{dU_a}{dt} = \frac{1}{C}I.$$

$$U_e = U_R + U_a = R \cdot I + U_a = RC \frac{dU_a}{dt} + U_a.$$

Tiefpass: Verhalten bei einem Rechtecksimpuls



$$U_e(t) = \begin{cases} U_0 & (t \in [0, \Delta t]), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$t \leq 0: 0 = RC \frac{dU_a}{dt} + U_a, \text{ also } U_a = 0.$$

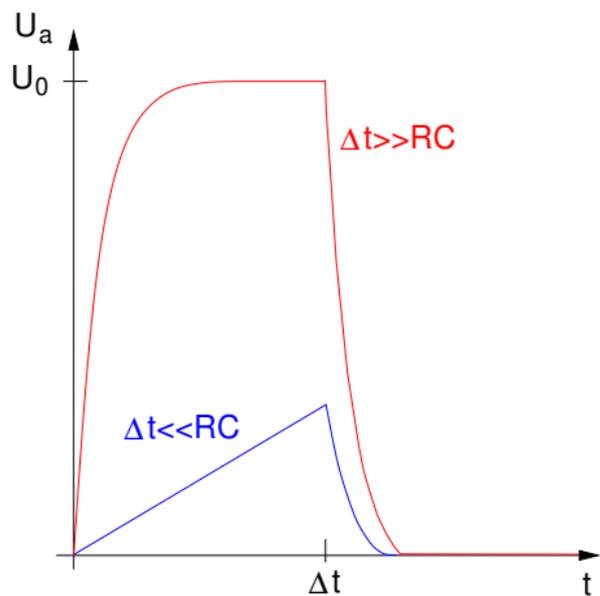
$$t \in (0, \Delta t): U_0 = RC \frac{dU_a}{dt} + U_a$$

$$\Leftrightarrow U_0 - U_a = RC \frac{dU_a}{dt} \Leftrightarrow \int_0^t \frac{1}{RC} dt' = \int_0^{U(t)} \frac{dU_a}{U_0 - U_a}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t}{RC} = \ln \frac{U_0 - U_a(t)}{U_0} \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{U_0 - U_a(t)}{U_0}$$

$$\Leftrightarrow U_a(t) = U_0(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}).$$

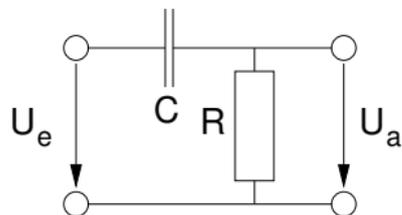
$$t \geq \Delta t: \frac{dU_a}{dt} = -\frac{1}{RC} U_a, \text{ also } U_a(t) = U_a(\Delta t)e^{-\frac{1}{RC}(t-\Delta t)}.$$



$$\Delta t \gg RC: U_a(t \rightarrow \Delta t - 0) \approx U_0.$$

$$\Delta t \ll RC: U_a(t) \approx U_0 \frac{t}{RC} \text{ für } t \in (0, \Delta t).$$

Verhalten eines Hochpasses



$$U_a = R \cdot I = RC \frac{d(U_e - U_a)}{dt} = RC \frac{dU_e}{dt} - RC \frac{dU_a}{dt}.$$

Wähle U_e wie zuvor als Rechtecksimpuls.

$$t \leq 0: U_a(t) = 0.$$

$$t \in (0, \Delta t): U_a(t) = -RC \frac{dU_a}{dt}, \text{ also } U_a(t) = U_a(0) e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

$$\epsilon \rightarrow 0 + 0: t \in [\Delta t, \Delta t + \epsilon): U_e(t) = U_0 \left(1 - \frac{t - \Delta t}{\epsilon}\right), \text{ also } \frac{dU_e}{dt} = -\frac{U_0}{\epsilon}.$$

$$U_a + \frac{RC}{\epsilon} U_0 = -RC \frac{dU_a}{dt}$$

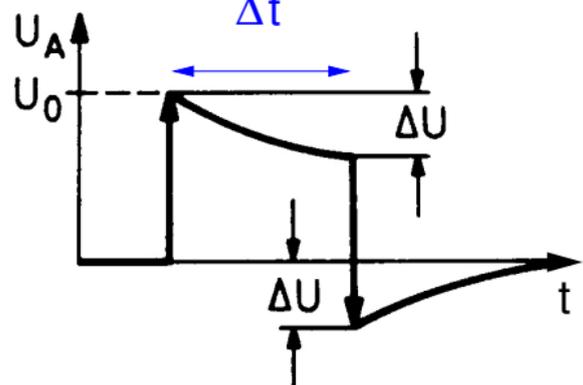
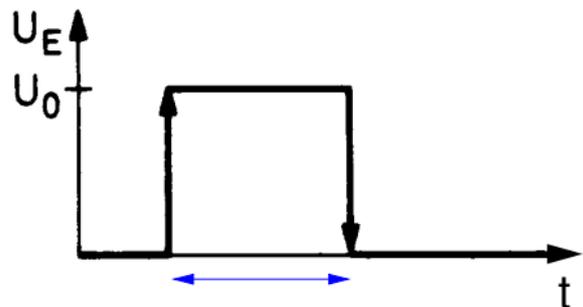
$$\Leftrightarrow \epsilon U_a + RC U_0 = -\epsilon RC \frac{dU_a}{dt}$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} U_0 = -\epsilon \frac{dU_a}{dt}, \quad U_0 \epsilon = -\epsilon [U_a(\Delta t + \epsilon) - U_a(\Delta t)]$$

$$\Leftrightarrow U_a(\Delta t + \epsilon) = U_a(\Delta t) - U_0 = U_0 \left(e^{-\frac{\Delta t}{RC}} - 1\right)$$

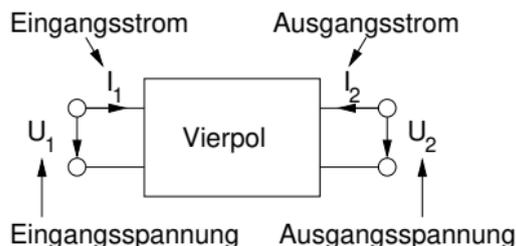
$$t \geq \Delta t: U_a(t) = U_0 \left(e^{-\frac{\Delta t}{RC}} - 1\right) e^{-\frac{t - \Delta t}{RC}}.$$

Tiefpass: Verhalten bei einem Rechtecksimpuls



Bipolare Impulsformung mit einem Hochpass möglich.

Vierpolgleichungen



Tiefpässe, Hochpässe und ähnliche Schaltungen mit insgesamt vier Anschlüssen nennt man **Vierpole**. Mit Hilfe sogenannter Vierpolgleichungen kann man das Verhalten von Schaltungen aus vielen Vierpolen sehr einfach berechnen.

Zwei der vier Größen sind frei wählbar, die andern beiden von diesen abhängig. Z.B. $U_1 = U_1(I_1, I_2)$, $U_2 = U_2(I_1, I_2)$.

$$dU_1 = \left. \frac{\partial U_1}{\partial I_1} \right|_{I_2} dI_1 + \left. \frac{\partial U_1}{\partial I_2} \right|_{I_1} dI_2,$$
$$dU_2 = \left. \frac{\partial U_2}{\partial I_1} \right|_{I_2} dI_1 + \left. \frac{\partial U_2}{\partial I_2} \right|_{I_1} dI_2,$$

Wenn der Vierpol nur aus linearen, passiven Bauelementen besteht, gilt sogar $\frac{\partial U_k}{\partial I_\ell} = \frac{U_k}{I_\ell}$.

Für die Berechnung des Verhaltens einer Kette von Vierpolen bietet sich die **Kettenform** an, bei der die Eingangs- bzw. Ausgangsgrößen als Funktionen der Ausgangs- bzw. Eingangsgrößen ausgedrückt werden:

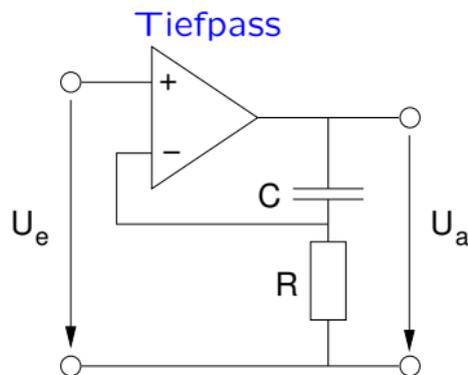
$$\begin{aligned}dU_1 &= \left. \frac{\partial U_1}{\partial U_2} \right|_{I_2} dU_2 + \left. \frac{\partial U_1}{\partial I_2} \right|_{U_2} dI_2, \\dI_1 &= \left. \frac{\partial I_1}{\partial U_2} \right|_{I_2} dU_2 + \left. \frac{\partial I_1}{\partial I_2} \right|_{U_2} dI_2.\end{aligned}$$

$$d \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = A \cdot d \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

Um das Verhalten eines Vierpols zu erhalten, der aus einer Vierpolkette besteht, muss man nur die Produktion der Matrizen A_k der einzelnen Vierpole miteinander multiplizieren.

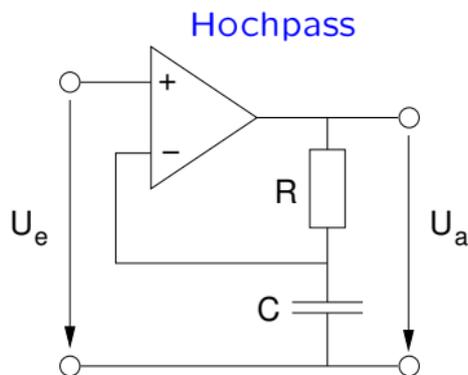
Impulsformung mit Tief- und Hochpässen

Zur Impulsformung von Detektorsignalen schaltet man Tief- und Hochpässe unterschiedlicher Zeitkonstanten (RC) hintereinander. Zur Trennung der Pässe kann man einen Operationsverstärker mit kapazitiver Ein- und Auskopplung der Signale verwenden.



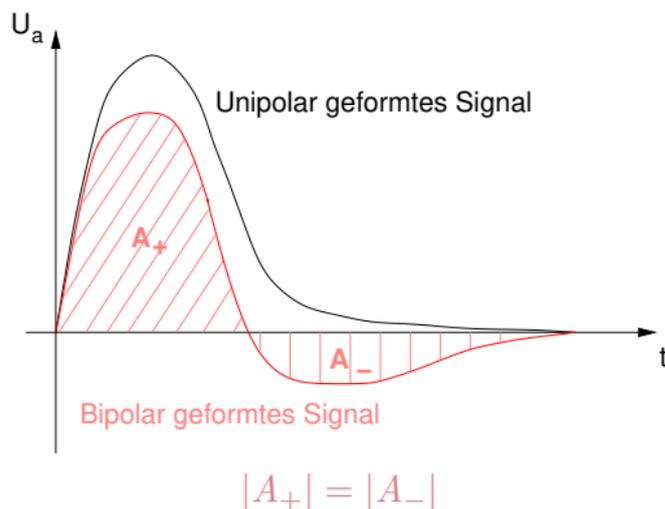
$$U_a = \left(1 + \frac{1}{i\omega RC}\right) U_e.$$

Verstärkung niedrige Frequenzen.



$$U_a = (1 + i\omega RC) U_e.$$

Verstärkung höherer Frequenzen.



Nachteil unipolaren Signalformens:

Wanderung des Impulsbodens aufgrund der Überlagerung aufeinanderfolgender Impulse bei hohen Signalraten.

Abhilfe für dieses Problem:

Verwendung bipolarer Impulsformung, wodurch der Impulsboden im Mittel nicht wandert.