Konzepte für Experimente an zukünftigen Hadroncollidern II

PD Dr. Oliver Kortner

27.05.2022

Grundlagen der statistischen Behandlung experimenteller Daten

Beispiel: Messung der Energie eines monoenergetischen Teilchenstrahls.

Bezeichnungen

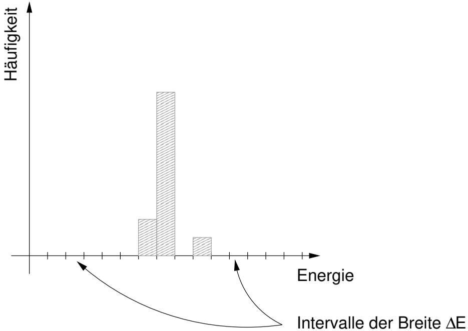
E_S: tatsächliche Strahlenergie.

N: Anzahl der Messungen der Strahlenergie.

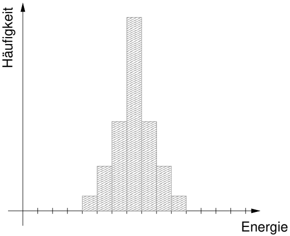
E_k: Ergebnis der k-ten Messung der Strahlenergie.

Häufigkeitsverteilungen

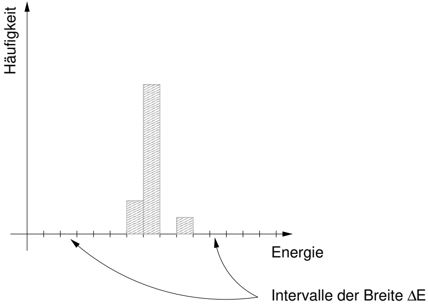
N klein



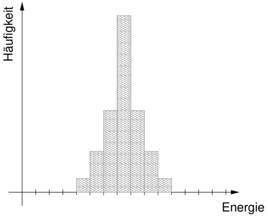
N groß



N klein



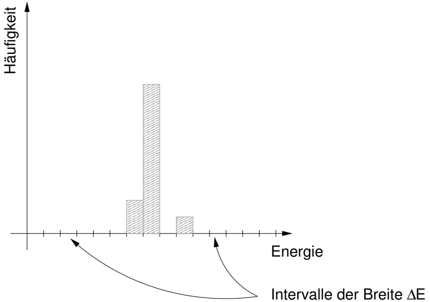
N groß



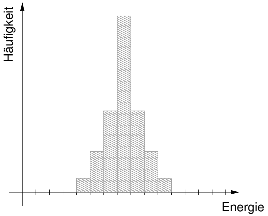
- Wenn N groß ist, erhält man bei Wiederholung der N Messungen (nahezu) dieselbe Häufigkeitsverteilung.
- Im Grenzfall $N \to \infty$ stimmt die Häufigkeitsverteilung mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Ausgang der Messung überein.

Einführendes Beispiel: Strahlenergiemessung

N klein



N groß



- Die Wahrscheinlichkeit, E_k zu messen, wenn die Strahlenergie E_S ist, hängt vom Wert von E_S und dem Messverfahren ab. Wenn man die Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(E_k; E_S)$ kennt, kann man über die Messung der Häufigkeitsverteilung auch E_S bestimmen.
- In der Praxis kennt man $p(E_k; E_S)$ nur begrenzt, und man versucht aus der gemessenen Häufigkeitsverteilung auf $p(E_k; E_S)$ zu schließe, woraus man einen Schätzwert von E_S erhält. In der Statistik beschäftigt man sich mit Verfahren, um aus Häufigkeitsverteilungen zu den zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu gelangen.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Eine physikalische Messung ist ein Zufallsprozess.
- Eine Messgröße x, die den Ausgang eines Zufallsprozesses angibt, bezeichnet man als eine Zufallsvariable oder Zufallsgröße.
- Jede Funktion von x ist ebenfalls eine Zufallsgröße.
- Falls die Zufallsgröße nur diskrete Werte annehmen kann, gibt es für das Auftreten jedes dieser Werte einen Wahrscheinlichkeit, was die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist.
- Bei Zufallsvariablen mit kontinuierlichem Wertebereich ersetzt die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion. Es sei Ω eine messbare Menge möglicher Werte von x, deren Maß größer Null ist. Dann ist

$$\int\limits_{\Omega} p(x)\,dx$$

  die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Wert $x \in \Omega$ zu beobachten.

Axiomatische Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Das mathematische Fachgebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie fußt auf Kolmogorovs Axiomen.

Kolmogorovaxiome

Σ bezeichne eine Ereignismenge.

1. Für jedes Ereignis $A \in \Sigma$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von A eine rellel Zahl $p(A) \in [0, 1]$.
2. Das sichere Ereignis $S \in \Sigma$ hat die Wahrscheinlichkeit $p(S) = 1$.
3. Die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung abzbar vieler inkompatibler Ereignisse ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. Dabei heißen Ereignisse A_k inkompatibel, wenn sie paarweise disjunkt sind, also $A_k \cap A_\ell = \emptyset$ für alle $k \neq \ell$ gilt.

Bemerkung. In diesem Abschnitt betrachten wir Wahrscheinlichkeitsdichten. Wahrscheinlichkeitsfunktionen diskreter Variablen sind ebenfalls abgedeckt, wenn man die δ-Distribution auch als eine Wahrscheinlichkeitsdichte ansieht.

Nomenklatur. D: Wertebereich einer Zufallsgröße $x = (x_1, ..., x_n)$.
$p(x)$: Wahrscheinlichkeitsdichte von x.
(D ist der Definitionsbereich von p.)

Definitionen

Der Erwartungswert von x, $E(x)$ (auch $< x >$) ist definiert als

$$E(x) := \int_D x \cdot p(x)\, dx.$$

Die Kovarianzmatrix $cov(x_k, x_l)$ ist definiert als

$$cov(x_k, x_l) :=< (x_k - < x_k >) \cdot (x_l - < x_l >) > .$$

Das Diagonalelement $cov(x_k, x_k)$ nennt man die Varianz von x_k, $Var(x_k)$, $\sqrt{Var(x_k)}$ die Standardabweichung $\sigma(x_k)$.

Erwartungswert einer Funktion einer Zufallsgröße

- Eine Funktion $f(x)$ ist ebenfalls eine Zufallsgröße.

$$< f >= \int_D f(x)p(x)dx.$$

- Wenn $f(x) = f(x- < x > + < x >)$ nur für kleine Werte von $|x- < x > |$ deutlich von 0 verschieden ist, kann man $f(x)$ durch

$$f(< x >) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{<x>} \cdot (x- < x >)$$

annähern. Dann ist

$$\begin{aligned} < f > &\approx \left\langle f(< x >) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{<x>} \cdot (x- < x >)\right\rangle \\ &= < f(x) > + \left\langle \left.\frac{df}{dx}\right|_{<x>} \cdot (x- < x >)\right\rangle \\ &= f(< x >) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{<x>} \cdot (< x > - < x >) = f(< x >). \end{aligned}$$

Sonderfall: $f(x) \in |\mathrm{R}$.

$$
\begin{aligned}
Var(f) &= \langle (f - < f >)^2 \rangle = \langle [f - f(< x >)] \rangle \\
&\approx \left\langle \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{df}{dx_k}\bigg|_{<x>} \cdot (x_k - < x_k >) \right]^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \left[\sum_{k,\ell=1}^{n} \frac{df}{dx_k}\bigg|_{<x>} \frac{df}{dx_\ell}\bigg|_{<x>} \cdot (x_k - < x_k >) \cdot (x_\ell - < x_\ell >) \right] \right\rangle \\
&= \sum_{k,\ell=1}^{n} \frac{df}{dx_k}\bigg|_{<x>} \frac{df}{dx_\ell}\bigg|_{<x>} \cdot \langle (x_k - < x_k >) \cdot (x_\ell - < x_\ell >) \rangle \\
&= \sum_{k,\ell=1}^{n} \frac{df}{dx_k}\bigg|_{<x>} \frac{df}{dx_\ell}\bigg|_{<x>} \cdot cov(x_k, x_\ell),
\end{aligned}
$$

was die bekannte Fehlerfortpflanzungsformel ist.

Beispiele wichtiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Die Binomialverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit an, n_k Ereignisse aus insgesamt N Ereignissen zu beobachten, wenn ν_k Ereignisse erwartet werden:

$$p(n_k; \nu_k) = \binom{N}{n_k} \left(\frac{\nu_k}{N}\right)^{n_k} \left(1 - \frac{\nu_k}{N}\right)^{N-\nu_k} .$$

- Mit $p := \frac{\nu_k}{N}$ erhält man aus

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dp}1 = \frac{d}{dp}\sum_{n_k=0}^{N} \binom{N}{n_k} p^{n_k}(1-p)^{N-n_k} \\ &= \sum_{n_k=0}^{N} \binom{N}{n_k} \left[n_k p^{n_k-1}(1-p)^{N-n_k} - (N-n_k)p^{n_k}(1-p)^{N-n_k-1}\right] \\ &= \frac{1}{p} < n_k > - \frac{1}{1-p} < N - n_k >= \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right) < n_k > + \frac{N}{1-p} \\ &= \frac{1}{p(1-p)} < n_k > + \frac{N}{1-p} \Leftrightarrow < n_k >= N \cdot p = N \cdot \frac{\nu_k}{N} = \nu_k . \end{aligned}$$

- Mit dem gleichen Rechentrick erhält man $Var(n_k) = \nu_k(1 - \frac{\nu_k}{N})$.