Konzepte für Experimente an zukünftigen Hadroncollidern II

PD Dr. Oliver Kortner

17.06.2022

Ziel: Bestimmung eines Intervalls, welches mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit den wahren Wert eines Parameters enthält.

Grenzfall der Normalverteilung

Nehmen wir an, die Größe $x \in \mathbb{R}$ sei normalverteilt, d.h.

$$p(x) = N(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}.$$

Wenn μ und σ bekannt sind, dann ist

$$p(a < x < b) = \int_a^b N(x;\mu,\sigma)dx =: \beta.$$

Falls μ unbekannt ist, kann man $p(\mu + c < x < \mu + d)$ berechnen:

$$\begin{aligned} \beta = p(\mu + c < x < \mu + d) &= \int_{\mu+c}^{\mu+d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\sigma^2}} dy \\ &= p(c - x < -\mu < d - x) = p(x - d < \mu < x - c). \end{aligned}$$

$$\beta = p(\mu + c < x < \mu + d) = \int_{\mu+c}^{\mu+d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\, dx = \int_{c}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\sigma^2}}\, dy$$

$$= p(c - x < -\mu < d - x) = p(x - d < \mu < x - c).$$

D.h. wenn man x gemessen hat, ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gesuchte Wert von μ zwischen $x - d$ und $x - c$ liegt, gleich β.

- Ist x ein Parameter $\hat{\alpha}$ aus einer Punktschätzung, die mit der Methode des maximalen Likelihoods oder der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt wurde, dann ist $\hat{\alpha}$ im asymptotischen Grenzfall normalverteilt, und die obigen Formeln können zur Intervallschätzung angewendet werden.
- Die Intervalle $[a, b]$ bzw. $[x - d, x - c]$ nennt man Konfidenzintervalle. β ist das zum Konfidenzniveau gehörige Konfidenzniveau.

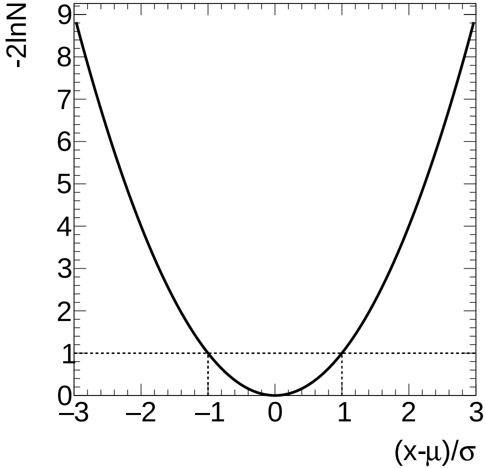
$$Q(x;\mu,\Sigma) := (x-\mu)^t \Sigma^{-1}(x-\mu),\ \ x,\mu \in \mathbb{R}.$$

$$p(Q) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2} Q(x;\mu,\Sigma)\right).$$

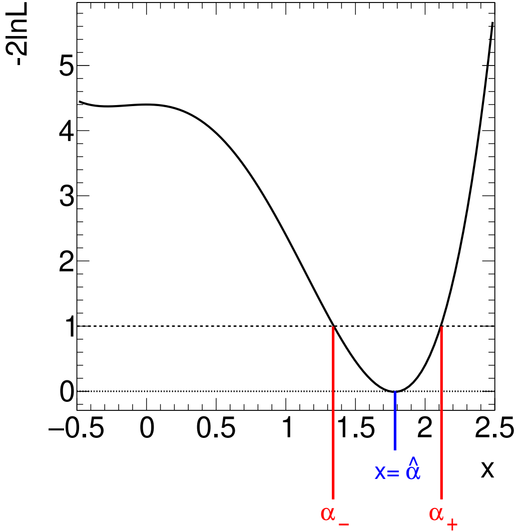
In mehreren Dimensionen wird das Konfidenzintervall zu einem Konfidenzbereich, der zum Konfidenzniveau β gehört:

$$p(Q(x;\mu,\Sigma) < K_\beta^2) = \beta.$$

$$-2\ln N(x = \mu \pm \sigma; \mu, \sigma) - [-2\ln N(x = \mu; \mu, \sigma] = 1.$$



Verallgemeinerung



Konfidenzintervall: $[\alpha_-, \alpha+]$.

Hypothesentest

Ziel, festzustellen, welche Hypothese (für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung) die aufgezeichneten Messpunktverteilungen (Daten) beschreibt.

Nomenklatur. H_0: Nullhypothese.
H_1: alternative Hypothese.

Einfache und zusammengesetzte Hypothesen

- Wenn die Hypothesen H_0 und H_1 vollständig ohne freie Parameter gegeben sind, nennt man die Hypothesen einfache Hypothesen.
- Falls eine Hypothese mindestens einen freien Parameter enthält, bezeichnet man sie als zusammengesetzte Hypothese.

Vorgehensweise

Für den Hypothesentest muss man W so wählen, dass

$$p(\text{Daten} \in W | H_0) = \alpha$$

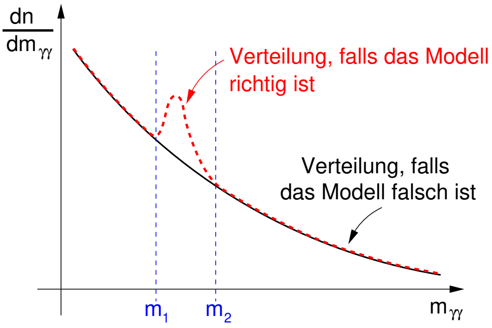
bei klein zu wählendem α und gleichzeitig

$$p(\text{Daten} \in D \setminus W | H_1) = \beta$$

mit möglichst kleinem β.

Einführendes Beispiel zum Hypothesentest

Ein theoretisches Modell sagt die Existenz eines Teilchens mit der Masse M, den Produktionswirkungsquerschnitt und die partielle Breite für den Zerfall in ein Photonenpaar voraus. Um dieses Modell zu bestätigen oder zu widerlegen, muss man sich die Verteilung von $m_{\gamma\gamma}$ ansehen.

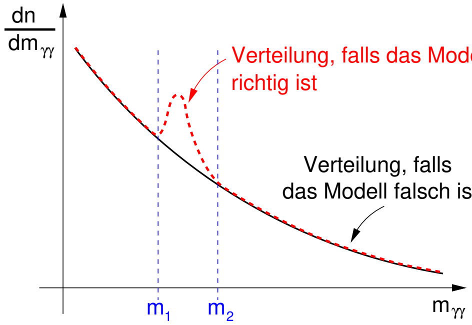


Im Intervall $[m_1, m_2]$ ist man auf die Vorhersage des Modells empfindlich. Man hat zwei Hypothesen, nämlich dass die Theorie richtig oder falsch ist.

H_0: Nullhypothese: „Theorie ist falsch."

H_1: Alternativhypothese: „Theorie ist richtig."

Bei genügend großer Datenmenge ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gemessene $m_{\gamma\gamma}$-Verteilung wie H_0 aussieht, klein, falls die Theorie stimmt. Gleichzeitig ist ide Wahrscheinlichkeit, dass die gemessenen Massenverteilung wie H_1 aussieht, groß.



n: Anzahl der im Intervall $[m_1, m_2]$ gemessenen Ereignisse.
Man muss nun einen Schwellenwert N so wählen, dass

$$p(n > N|H_0) = \alpha$$

mit klein zu wählendem α und

$$p(n \leq N|H_1) = \beta$$

möglichst klein ist, falls die Theorie, also H_1 richtig ist.

n: Anzahl der im Intervall $[m_1, m_2]$ gemessenen Ereignisse.
Man muss nun einen Schwellenwert N so wählten, dass

$$p(n > N|H_0) = \alpha$$

mit klein zu wählendem α und

$$p(n \leq N|H_1) = \beta$$

möglichst klein ist, falls die Theorie, also H_1 richtig ist.

Experimentelle Praxis

- $\alpha = 5,7 \cdot 10^{-7}$, was 5$\sigma$ einer Normalverteilung entspricht, um die Entdeckung eines Teilchens zu behaupten.
- Bei einem Wert von $\alpha = 0,3\%$, was 3σ einer Normalverteilung entspricht, sagt man, man habe Anzeichen für die Existenz eines neuen Teilchens.

Fehler erster und zweiter Art

Das Konfidensniveau α ist als die Wahrscheinlichkeit definiert, dass $x \in W$ liegt, falls die Nullhypothese H_0 richtig ist:

$$p(x \in W|H_0) = \alpha.$$

Die Wahrscheinlichkeit β gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass man die Alternativhypothese H_1 fälschlicherweise verwirft:

$$p(x \in D \setminus W|H_1) = \beta.$$

Vorgehensweise	H_0 richtig	H_1 richtig
$x \notin W \Rightarrow H_0$ wird als richtig betrachtet	Gute Akzeptanze, da $p(x \in D \setminus W\|H_0) = 1 - \alpha$ groß ist	Verunreinigung Fehler zweiter Art $p(x \in D \setminus W\|H_1) = \beta$.
$x \in W \Rightarrow H_0$ wird verworfen, H_1 als richtig betracht	Fehlentscheidung Fehler erster Art $p(x \in W\|H_0) = \alpha$ ist klein	Verwerfen von H_0 gut, da $p(x \in W\|H_1) = 1 - \beta$ ist groß.