

Konzepte für Experimente an zukünftigen Hadroncollidern II

PD Dr. Oliver Kortner

01.07.2022

Der Neyman-Pearson-Test für einfache Hypothese

$x = (x_1, \dots, x_n)$: Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_N(x; \theta)$.

- $\theta = \theta_0$: Nullhypothese.
- $\theta = \theta_1$: Alternativhypothese.

$$\alpha = \int_{W_\alpha} f_N(x; \theta_0) dx.$$

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= \int_{W_\alpha} f_N(x; \theta_1) dx = \int_{W_\alpha} f_N(x; \theta_1) \cdot \frac{f_N(x; \theta_0)}{f_N(x; \theta_0)} dx = \int_{W_\alpha} \frac{f_N(x; \theta_1)}{f_N(x; \theta_0)} \cdot f_N(x; \theta_0) dx \\ &= E_{W_\alpha} \left(\frac{f_N(x; \theta_1)}{f_N(x; \theta_0)} \right). \end{aligned}$$

- E_{W_α} wird besonders groß, wenn W_α diejenigen Punkte x enthält, für die $\frac{f_N(x; \theta_1)}{f_N(x; \theta_0)}$ besonders groß wird.
- Die beste kritische Region wählt man, indem man

$$\ell_N(x; \theta_0, \theta_1) := \frac{f_N(x; \theta_1)}{f_N(x; \theta_0)} \geq c_\alpha$$

für die Punkte $x \in W_\alpha$ verlangt.

Der Neyman-Pearson-Test für einfache Hypothese

$x = (x_1, \dots, x_n)$: Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_N(x; \theta)$.

- $\theta = \theta_0$: Nullhypothese.
- $\theta = \theta_1$: Alternativhypothese.
- Die beste kritische Region wählt man, indem man

$$\ell_N(x; \theta_0, \theta_1) := \frac{f_N(x; \theta_1)}{f_N(x; \theta_0)} \geq c_\alpha$$

für die Punkte $x \in W_\alpha$ verlangt.

Neyman-Pearson-Test. Man verwendet das Likelihoodverhältnis

$\ell_N(x; \theta_0, \theta_1)$ als Entscheidungsgrundlage:

- $\ell_N(x; \theta_0, \theta_1) \geq c_\alpha \Rightarrow H_1$ wird akzeptiert, H_0 verworfen.
- $\ell_N(x; \theta_0, \theta_1) < c_\alpha \Rightarrow H_0$ wird akzeptiert, H_1 verworfen.

Verallgemeinerung auf zusammengesetzte Hypothesen

H_0 und H_1 enthalten unbekannte freie Parameter θ .

- Θ : Menge aller möglichen θ -Werte.
- ν : Teilmenge von Θ .

Man führt zwei Familien von Hypothesen ein:

- $H_0: \theta \in \nu$.
- $H_1: \theta \in \Theta \setminus \nu$.

Beispiel. Kopplungsstärke g . $H_0: g = 0$. $H_1: g > 0$.

Man ersetzt ℓ_N durch λ , was als das Verhältnis zweier maximierter Likelihoodfunktionen genommen wird:

$$\lambda := \frac{\max_{\theta \in \nu} L(x; \theta)}{\max_{\theta \in \Theta} L(x; \theta)}$$

Wechselwirkung von Teilchen mit Materie

Zwei Effekte beim Durchgang geladener Teilchen durch Materie

- Energieverlust.
- Ablenkung von der ursprünglichen Flugbahn.

Hierfür verantwortliche Prozesse

- Inelastische Stöße an atomaren Elektronen des durchlaufenen Materials.
- Elastische Streuung an den Atomkernen des Materials.
- Emission von Čerenkovstrahlung.
- Kernreaktionen.
- Bremsstrahlung.

Für schwere geladene Teilchen sind die ersten beiden Prozesse dominant.

Unter schweren geladenen Teilchen versteht man μ^\pm , π^\pm , p , \bar{p} , α -Teilchen, leichte Kerne.

Energieverlust schwerer geladener Teilchen

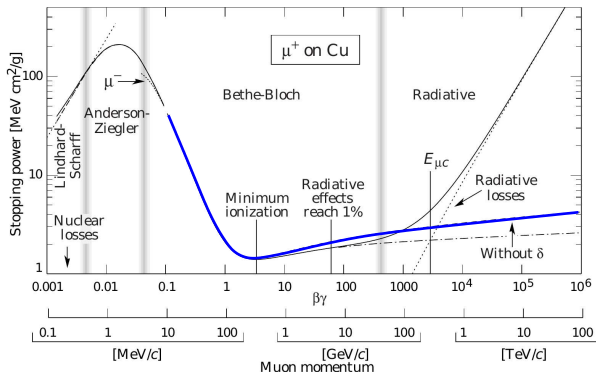
Schwere geladene Teilchen verlieren ihre Energie durch Anregung und Ionisierung von Atomen. Der Energieverlust pro durchlaufener Wegstrecke wird durch die **Bethe-Bloch-Formel** beschrieben:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi n z^2}{m_e c^2 \beta^2} \cdot \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2}{I(1-\beta^2)} - \beta^2 \right) \right];$$

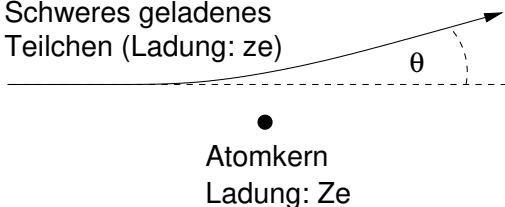
$\beta = v/c$: Geschwindigkeit des Teilchens. E : Energie des Teilchens.

z : Ladung des Teilchens. e : Elementarladung. n : Elektronendichte des Materials.

I : mittleres Anregungspotential des Materials.



Schweres geladenes
Teilchen (Ladung: ze)

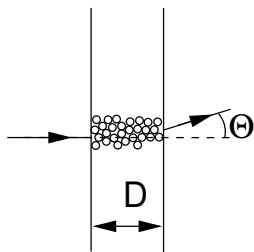


Streuung an einem einzelnen Kern:

$$\theta = \frac{\Delta p}{p} \propto \frac{z \cdot Z}{p}.$$

$$\langle \theta \rangle = 0, 0 \neq \theta_0^2 := \text{Var}(\theta) \propto \frac{z^2 \cdot Z^2}{p^2}.$$

Streuung an vielen Kernen:



$$\langle \Theta \rangle = 0$$

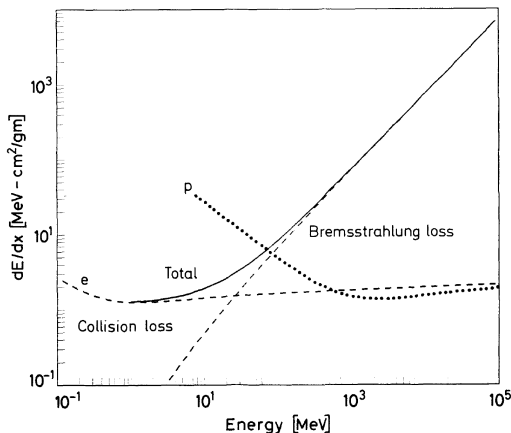
$$\Theta_0^2 := \text{Var}(\Theta) = \sum_{\text{Stöße}} \theta_0^2 \propto D \cdot z^2 \cdot Z^2 p^2.$$

Also erhält man $\Theta_0 \propto \frac{\sqrt{D}}{p}$.

Energieverlust von Elektronen und Positronen

m_e ist so klein, dass die Beschleunigung, die die Elektronen bzw. Positronen in Stößen an den Atomkernen erfahren, so groß ist, dass Bremsquanten abgestrahlt werden können.

$$\left. \frac{dE}{dx} \right|_{e^\pm} = \left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{Stöße}} + \left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{Bremsstrahlung}}$$



Kritische Energie E_k

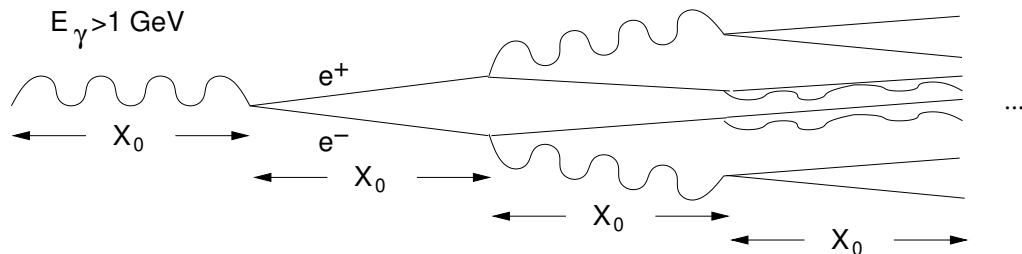
$$\left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{Stöße}} (E_k) = \left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{Bremsstrahlung}} (E_k).$$

$E_k \approx \frac{800 \text{ MeV}}{Z+1/2}$, weshalb oberhalb $E_{e^\pm} > 1 \text{ GeV}$ Bremsstrahlung dominant ist.

Hauptprozesse

- Lichtelektrischer Effekt im Bereich $E_{\gamma} \sim \text{keV}$.
- Comptonstreuung im Bereich $E_{\gamma} \sim \text{MeV}$.
- Elektron-Positron-Paarherzeugung für $E_{\gamma} \gtrsim 10 \text{ MeV}$.

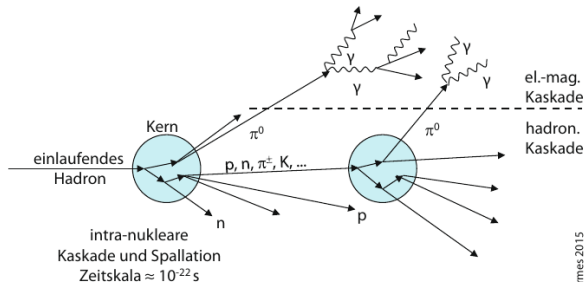
Konsequenz für hochenergetische Photonen. Ausbildung sogenannter elektromagnetischer Schauer im durchlaufenen Material.
Genauere Betrachtung in der nächsten Vorlesung.



- Nach der Strecke $n \cdot X_0$: 2^n Teilchen mit Energie $E_n \approx \frac{E_\gamma}{2^n}$.
- Ende der Kaskade (des Schauers), wenn $E_n = E_k$: $n = \frac{\ln \frac{E_\gamma}{E_k}}{\ln 2}$.
- Länge des Schauers: $n \cdot X_0 = X_0 \cdot \frac{\ln \frac{E_\gamma}{E_k}}{\ln 2}$.
- Transversale Ausdehnung des Schauers unabhängig von E_γ :

$$L_\perp \approx 4R_M = 4X_0 \frac{21,2 \text{ MeV}}{E_k}$$

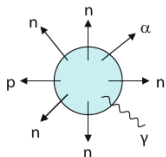
Hochenergie-Kaskade



Kolancski, Wermes 2015

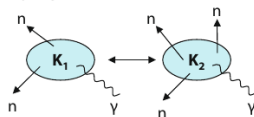
Deaktivierung des Kerns

Zeitskala $\geq 10^{-18}$ s



Evaporation

oder

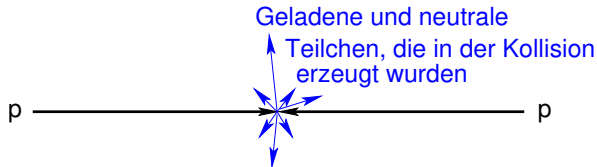


Spaltung

Qualitativ ähnliches Verhalten wie bei elektromagnetischen Schauern:

- Schauerlänge proportional zu $\lambda_A \approx 35 \text{ g cm}^{-2} \frac{A^{1/3}}{\rho} \gg X_0$.
- Transversale Ausdehnung unabhängig von der Energie des primären Hadrons: λ_A .

Rekonstruktion von pp -Kollisionsereignissen



In einer Kollision erzeugbare Teilchen im Endzustand

Leptonen

- Neutrinos: stabil, nur schwach geladen. \Rightarrow Keine Wechselwirkung, die zu einem messbaren elektrischen Signal in den Detektorkomponenten führt.
- Elektronen: stabil, elektrisch geladen. \Rightarrow Elektrische Signale in den Detektorkomponenten.
- Myonen: instabil, aber, da ultrarelativistisch, im Laborsystem so langlebig, dass sie nicht im Detektor zerfallen; elektrisch geladen. \Rightarrow Elektrische Signale in den Detektorkomponenten.
- τ -Leptonen: instabil. \Rightarrow Nur über ihre Zerfallsprodukte nachweisbar.

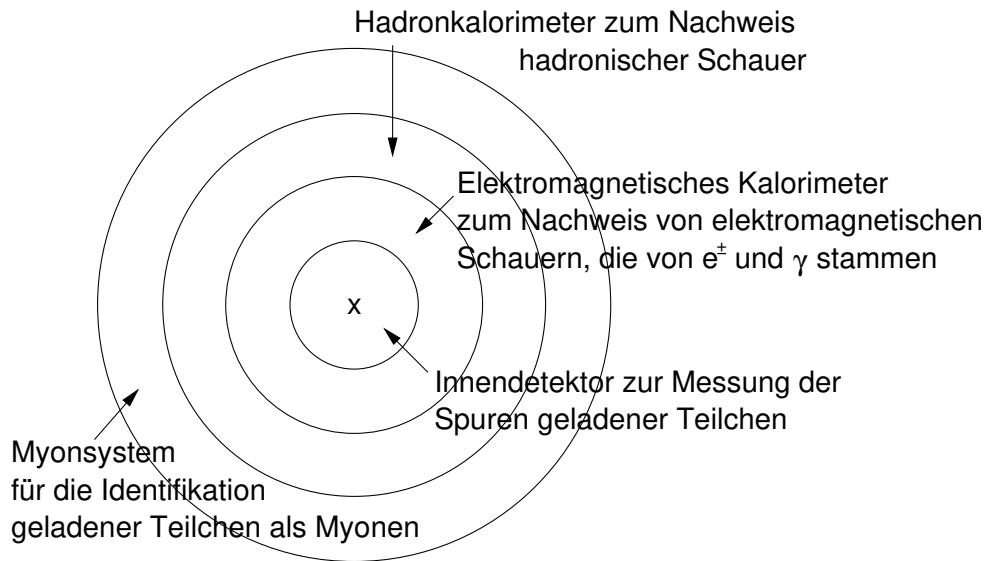
Weitere in einer Kollision erzeugbare Teilchen im Endzustand

Hadronen

- In der elementaren Kollision entstehen zunächst Quarks und Gluonen. Wegen des Confinements sieht man nicht diese nicht, sondern sogenannte Jets aus Hadronen, die aus den Quarks und Gluonen entstanden sind.
- Besondere Rolle zweier Quarks:
 - b-Quarks bilden langlebige b-Hadronen, was die Identifizierung von b-Quarkjets ermöglicht.
 - t-Quarks sind so kurzlebig, dass sie keine Hadronen bilden können. Sie sind über ihren Zerfall $t \rightarrow Wb$ nachweisbar.

Photonen

Photonen sind stabil. Sie sind zwar elektrisch neutral, können aber in Materie elektromagnetische Schauer erzeugen, die im Detektor nachgewiesen werden können.

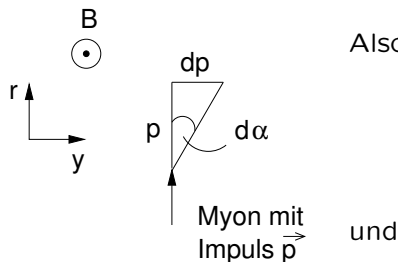


Rekonstruktion der Flugbahnen von Myonen im gewissen Sinne am einfachsten, weil der Energieverlust der Myonen im Innendetektor vernachlässigbar ist und die Flugbahn daher nur von folgenden Größen abhängt:

- \vec{x}_0, \vec{p} am Wechselwirkungspunkt.
- Magnetfeld im Innendetektor.
- Vielfachstreuung im Innendetektor.

Die Rekonstruktion von Myonspuren wie von Teilchenspuren im Allgemeinen erfolgt in zwei miteinander verknüpften Schritten, der sogenannten **Mustererkennung**, bei der man die zur Teilchenspur gehörigen Trefferpunkte im Innendetektor sucht, und der sogenannten **Spurbestimmung**, bei der man den Verlauf der Flugbahn aus den in der Mustererkennung ausgewählten Trefferpunkten berechnet.

$$d\alpha = \frac{dp}{p} = \frac{qvBdt}{p} = \frac{q}{p} B \underbrace{vdt}_{=ds=dr} = \frac{q}{p} B ds.$$



Also erhalten wir

$$\alpha(r) \approx \frac{q}{p} \int_{r_0}^r B(s) ds$$

und

$$y(r) = \int_{r_0}^r \alpha(r') dr' = \frac{q}{p} \int_{r_0}^r \int_{r_0}^{r'} B(s) ds dr'.$$

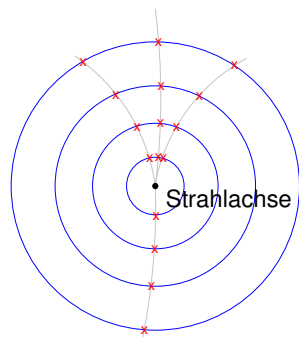
Beispiel. $p = 1 \text{ GeV}$. $r_0 = 0$. $B = 2 \text{ T}$.

$\alpha(10 \text{ cm}) = 60 \text{ mrad}$. $y(10 \text{ cm}) = 3 \text{ mm}$.

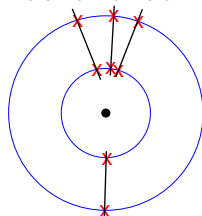
$\alpha(1 \text{ m}) = 0,6 \text{ rad}$. $y(1 \text{ m}) = 30 \text{ mm}$.

Ein mögliches Verfahren zur Mustererkennung

1. Betrachte alle Trefferpaare in Strahlnähe nacheinander.



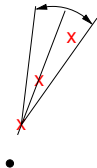
- Tatsächliche Flugbahn
- Detektorebene
- x Trefferpunkt



Spurstück
x nach Paarung
x

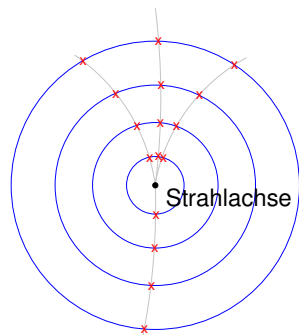
2. Suche nach Treffern in Suchkorridoren um die nach außen extrapolierten Spurstücke.

Suchkorridor



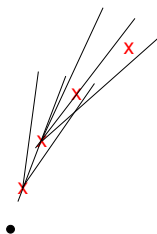
Die Größe des Suchkorridors bestimmt den kleinsten messbaren Impuls p .

Ein mögliches Verfahren zur Mustererkennung



- Tatsächliche Flugbahn
- Detektorebene
- x Trefferpunkt

3. Fahre mit der Extrapolation bis zur äußersten Messebene des Innendetektors fort.



Zwei Möglichkeiten:

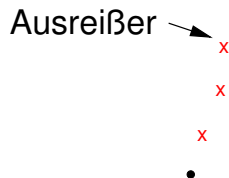
- (a) Größe des Suchkorridors konstant.
- (b) Größe des Suchkorridors abhängig vom Verlauf der bisher gefundenen Treffer.

Man betrachtet nun alle Trefferansammlungen nacheinander, die man während der Mustererkennung gefunden hat.

Idealfall: Nur ein Treffer in jeder Detektorlage, keine Ausreißer.



Situation mit sogenannten Ausreißern



Situation mit mehr als einem Treffer in einer Lage



- - x Trefferkoordinaten: $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$.
 - x Positionsunsicherheiten: $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.
 - x Unsicherheiten in den Detektorpositionen, sogenannte Alignierungsunsicherheiten, führen zu nichtverschwindenden Nichtdiagonalelementen in der Kovarianzmatrix $Cov(x_k, x_\ell)$
- Berücksichtigung des Einflusses der Vielfachstreuung durch Einführung von Streuzentren, in denen die Flugbahn einen Knick machen darf.
- Spurfunktion: $\vec{y}_k = \vec{y}_k(\frac{q}{p}, \vec{x}_0, \hat{\vec{p}})$.
- Bestimmung von $\frac{q}{p}$, \vec{x}_0 und $\hat{\vec{p}}$ über die Methode der kleinsten Quadrate:

$$Q^2 = \sum_{k,\ell=1}^n (\vec{x}_k - \vec{y}_k)^t Cov(\vec{x}_k, \vec{x}_\ell) (\vec{x}_\ell - \vec{y}_\ell).$$

Behandlung von Ausreißern

Möglichkeit 1. Iteratives Verfahren: Spurbestimmung mit Ausreißern.

Dann Ermitteln von Ausreißern von dieser Spur. Danach Wiederholung der Spurbestimmung ohne die so gefundenen Ausreißer.

Möglichkeit 2. $\sigma_k = \bar{\sigma}_k$ für $|\vec{x}_k - \vec{y}_k| < \delta$, $\sigma_k \rightarrow \infty$ für $|\vec{x}_k - \vec{y}_k| \geq \delta$. Damit wird der Beitrag der Ausreißer zu Q^2 vernachlässigbar klein.

Behandlung von Mehrdeutigkeiten

$\sigma_k = \sigma(|\vec{x}_k - \vec{y}_k|)$ wie oben und Mitnahme aller Treffer.

Oder Spurbestimmung mit den vorhandenen möglichen

Trefferkombination und Auswahl der Spur mit dem kleinsten Q^2 .

- $m_{\pi^\pm} \approx m_{\mu^\pm} \Rightarrow$ Pionspuren sind Myonspuren sehr ähnlich.
- $\pi \rightarrow \mu\nu_\mu$ -Zerfälle sind wegen der Zeitdilatation im Laborsystem sehr selten. Da aber so viel π^\pm in pp -Kollisionen erzeugt werden, kommt es mit nicht zu vernachlässigender Häufigkeit vor, dass ein geladenes Pion noch innerhalb des Innendetektors zerfällt. Im Zerfallspunkt macht dann die Spur einen Knick.
- Die Größe dieses Knicks muss man zumindest bei der Größe der Treffersuchkorridore berücksichtigen.